Felsőbb Matematika 1. ZH 2014-10-29

1. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a teret az $x+y+z=0$ egyenletű sík mentén az $(1,1,0)$ vektor által kifeszített 1-dimenziós térre vetíti! *(3 pont)*

Megoldás. A vetítés az $(1,1,0)$ vektort önmagába viszi, a sík vektorait – például a síkot kifeszítő $(1,-1,0)$ és $(1,0,-1)$ vektorokat – a nullvektorba, így a vetítés $\mathbf{X}$ mátrixára

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

amiből

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

2. Adjuk meg $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakját és annak 2014-dik hatványát, ahol *(3 pont)*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Megoldás. A karakterisztikus polinomot felírva látható, hogy $\mathbf{A}$-nak a 2 háromszoros sajátértéke. Ugyanakkor csak 2 független sajátvektor tartozik hozzá, következésképpen a 2 sajátértékhez 2 Jordan-lánc tartozik, melyek összhossza 3. Ez csak egyféleképp lehet, mégpedig ha egy 1 hosszú és egy 2 hosszú lánc van. Ennek megfelelően a Jordan-normálalak:

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

és ennek 2014. hatványa

$$\mathbf{J}^{2014}=\begin{bmatrix}2^{2014} & 2014\cdot 2^{2013} & 0\\ 0 & 2^{2014} & 0\\ 0 & 0 & 2^{2014}\end{bmatrix}.$$

3. Határozzuk meg az $(1,1,1,1)$ vektornak az $(1,-1,1,0)$ normálvektorú hipersíkra vonatkozó tükörképét! *(3 pont)*

Megoldás. Geometriai meggondolások alapján a tükörképet úgy is megkaphatjuk, ha az $\mathbf{v}=(1,1,1,1)$ vektorból kivonjuk kétszer az $\mathbf{v}$ vektornak a $\mathbf{w}=(1,-1,1,0)$ vektor által generált 1-dimenziós altérbe eső komponensét. Ez nem más, mint a $\mathbf{v}$ vektornak a $\mathbf{w}$ vektorral párhuzamos komponense:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{w}}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\mathbf{w}=\frac{1}{3}(1,-1,1,0).$$

Ez alapján a tükörkép:

$$\mathbf{v}-2\mathbf{v}_{\mathbf{w}}=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3},1\right).$$

4. Melyek primitívek az alábbi mátrixok közül? *(3 pont)*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}.$$

Megoldás. Felrajzolva a megfelelő gráfokat láthatjuk, hogy $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ irreducibilis, míg $\mathbf{A}$ reducibilis, következésképp $\mathbf{A}$ biztosan nem primitív. $\mathbf{B}$ főátlójában van pozitív elem, így ő is primitív. $\mathbf{C}$ logikai mátrixát logikai műveletekkel hatványozva azt kapjuk, hogy a 2. hatvány sem pozitív, és a 3. hatványnál visszakapjuk az eredeti logikai mátrixot, tehát $\mathbf{C}$ nem primitív.

5. Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Diagonalozáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot és adjuk meg a spektrálfelbontását! Mennyi $\arcsin\frac{\mathbf{A}}{2}$ értéke? *(6 pont)*

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $2, -1, 0$ és a hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig rendre $(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)$. Ennek megfelelően $\mathbf{A}$ diagonalizálható, és $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$, ahol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből a spektráfelbontás $\mathbf{A} = 2\mathbf{P}_1 + (-1)\mathbf{P}_{-1} + 0\mathbf{P}_0$, ahol

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0\ 1\ -1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1\ 1\ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ -1\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A feladat további részéhez:

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{\mathbf{A}}{2} &= \mathbf{C} \arcsin \frac{\mathbf{D}}{2} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\,\mathrm{diag}(\arcsin \frac{2}{2}, \arcsin \frac{-1}{2}, \arcsin \frac{0}{2})\mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{C}\,\mathrm{diag}(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, 0)\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} & -\frac{\pi}{6} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{6} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris felbontását! *(3 pont)*

Megoldás. $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, karakterisztikus polinomja $x^3 - 3x^2 + 2x$, melynek zérushelyei 2, 1, 0, így ezek négyzetgyökei a szinguláris értékek. A sajátvektorok rendre $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,-1)$, ezek normáltjai lesznek a $\mathbf{V}$ mátrix oszlopai, ahol tehát $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0\ 1\ 1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [1\ 0\ 0]^\top$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0\ 1\ -1]^\top$. Mivel $\mathbf{Av}_1 = 2\mathbf{e}_1$, $\mathbf{Av}_2 = \mathbf{e}_2$, így $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, tehát a szinguláris felbontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$$

7. Legyen $\mathbf{A}$ egy nemnegatív irreducibilis mátrix, melynek spektrálsugara r. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathbf{S}$ sztochasztikus mátrix (minden oszlopösszege 1), hogy $\mathbf{A}$ hasonló $r\mathbf{S}$-hez. (Útmutatás: tekintsük a bal Perron-vektorból képzett diagonális mátrixot!) *(4 pont)*

Megoldás. $\mathbf{q}$ bal Perron-vektor, tehát $\mathbf{q}^\top \mathbf{A} = r\mathbf{q}^\top$. Legyen $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix}$. Épp ez lesz a hasonlóságot biztosító mátrix, megmutatjuk ugyanis, hogy $\mathbf{QAQ}^{-1}$ minden oszlopösszege r:

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{QAQ}^{-1} = \mathbf{q}^\top \mathbf{AQ}^{-1} = r\mathbf{q}^\top \mathbf{Q}^{-1} = r\mathbf{1}^\top,$$

tehát $\mathbf{QAQ}^{-1}$ minden oszlopösszege r. Mivel $\mathbf{A}$ nemnegatív és irreducibilis, ezért $r > 0$, így $\mathbf{A}$ valóban hasonló $r\mathbf{S}$-hez, ahol $\mathbf{S}$ egy sztochasztikus mátrix.