Név: ______________________________ Neptun: __________

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Felsőbb Matematika 1. pótZH 2014-12-12

1. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a teret az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra vetíti az $(1, 1, 0)$ vektorral párhuzamosan! *(3 pont)*

Megoldás. A vetítés az $(1, 1, 0)$ vektort a nullvektorba viszi, a sík vektorait – például a síkot kifeszítő $(1, -1, 0)$ és $(1, 0, -1)$ vektorokat – helyben hagyja. Így a vetítés $\mathbf{X}$ mátrixára

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

amiből

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 4z &= 4 \\ x + y + z &= 1 \\ 4x + 10y + 10z &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert az együttható márix PLU-felbontásának segítségével! *(4 pont)*

Megoldás. Az egyenletrendszer együttható mátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$. Gauss-eliminációhoz célszerű megcserélni az első 2 sort. Ezt a $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixxal való balszorzással érhetjük el, vagyis

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ezt a mátrixot Gauss-eliminálva kapjuk, hogy $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ennek megfelelően $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{LU} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU} = \mathbf{PLU}$. Az egyenletrendszer megoldásához:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{LUx} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{LUx} = \mathbf{Pb} \rightsquigarrow \mathbf{LUx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Meg kell tehát oldani először az $\mathbf{Ly} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert. Ennek megoldása $\mathbf{y} = (1, 1, -3)$. Ezek után már csak az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszer van hátra, aminek megoldása $\mathbf{x} = (1, 1, -1)$.

3. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét! *(4 pont)*

Megoldás. Első megoldás. Mivel $\mathbf{A}$ egy 1 rangú mátrix így bázisfelbontása épp a diadikus felbontása, vagyis

$$\mathbf{A} = (1, 2, 0, -1) \otimes (1, -2, 2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Használva az oszlop- illetve sorvektor pszeudoinverzéről tanultakat (vagy azt használva, hogy egy oszlop- illetve sorvektor egy teljes oszlop- illetve sorrangú mátrix) kapjuk, hogy:

$$\mathbf{A}^+ = (1, -2, 2)^+ \otimes (1, 2, 0, -1)^+ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^+$$

$$= \frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}(1, -2, 2) \otimes \frac{1}{9}(1, 2, 0, -1) = \frac{1}{54}\mathbf{A}^T.$$

Második megoldás. $\mathbf{A}$ egy 1 rangú mátrix, így (gyakorlaton tanult azonosság)

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T = \frac{1}{54}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül? *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrix nem szimmetrikus, így nem lehet pozitív definit. $\mathbf{B}$ főátlójában van negatív elem (így van negatív főminora), tehát szintén nem lehet pozitív definit. $\mathbf{C}$ vezető főminorai rendre 1, 1, 3 így $\mathbf{C}$ pozitív definit.

5. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Diagonalozáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot és adjuk meg a spektrálfelbontását!

b) Bontsuk fel az $(1, 1, 1)$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix sajátaltereibe eső komponensekre!

c) Mennyi $\frac{2}{\pi} \arcsin(\mathbf{A})$ értéke? *(4 pont)*

Megoldás. a) Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, így ortogonálisan diagonalizálható. Sajátértékei 1 (kétszeres multiplicitással) és -1. Az 1-hez tartozó normált sajátvektorok $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, 1, 0)$, a -1-hez pedig $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ennek megfelelően $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$, ahol

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ebből a spektráfelbontás $\mathbf{A} = 1\mathbf{P}_1 + (-1)\mathbf{P}_{-1}$, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) + (0, 1, 0) \otimes (0, 1, 0) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{-1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Az $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ vektor felbontása a projekciók segítségével:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}_1\mathbf{v} + \mathbf{P}_{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ugyanezt a felbontsát a projekciók nélkül is ki lehet találni, ha észrevesszük, hogy az $(1, 1, 1)$ vektor benne van az 1-hez tartozó sajátaltérben.

c) A helyettesítési érték:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \arcsin(\mathbf{A}) &= \mathbf{Q}(\frac{2}{\pi} \arcsin(\mathbf{D}))\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \operatorname{diag}(\frac{2}{\pi} \arcsin(1), \frac{2}{\pi} \arcsin(1), \frac{2}{\pi} \arcsin(-1))\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \operatorname{diag}(1, 1, -1)\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \mathbf{A} \end{aligned}$$

6. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ nullterének dimenziója $k = 1, 2, 3, 4$ esetén rendre 5, 8, 9, 10. Írjuk fel a Jordan-féle normálalakját! *(3 pont)*

Megoldás. A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik. Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$\begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 2 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 5 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 2 \\ n_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c} \lambda & 1 & & & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & & & & \\ & & \lambda & 1 & & & & & & \\ & & & \lambda & & & & & & \\ \hline & & & & \lambda & 1 & & & & \\ & & & & & \lambda & & & & \\ \hline & & & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & & \lambda & & \\ \hline & & & & & & & & \lambda & \\ \hline & & & & & & & & & \lambda \end{array}\right]$$

7. Mutassuk meg, hogy ha λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, de μ nem, akkor $\frac{1}{\lambda-\mu}$ sajátértéke az $(\mathbf{A}-\mu\mathbf{I})^{-1}$ mátrixnak. *(4 pont)*

Megoldás. Mivel μ nem sajátérték, ezért $\det(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) \neq 0$, így $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$ invertálható, és $\lambda - \mu \neq 0$.

Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}(\lambda - \mu)\mathbf{x}. \end{aligned}$$