Szinguláris értékek

Wettl Ferenc

2014. október 13.

D A pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós (komplex) $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei, ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a a sortérnek (konjugáltjának) és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a az oszloptérnek (konjugáltjának), hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

D A pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós (komplex) $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei, ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a a sortérnek (konjugáltjának) és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a az oszloptérnek (konjugáltjának), hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

A $\mathbf{v}_i$ vektorokat bal, az $\mathbf{u}_i$ vektorokat jobb szinguláris vektoroknak nevezzük.

D A pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós (komplex) $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei, ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a a sortérnek (konjugáltjának) és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a az oszloptérnek (konjugáltjának), hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

A $\mathbf{v}_i$ vektorokat bal, az $\mathbf{u}_i$ vektorokat jobb szinguláris vektoroknak nevezzük.

M $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r) \rightsquigarrow |\mathbf{A}\mathbf{v}_i| = \sigma_i$.

D A pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós (komplex) $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei, ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a a sortérnek (konjugáltjának) és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a az oszloptérnek (konjugáltjának), hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

A $\mathbf{v}_i$ vektorokat bal, az $\mathbf{u}_i$ vektorokat jobb szinguláris vektoroknak nevezzük.

M $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r) \rightsquigarrow |\mathbf{A}\mathbf{v}_i| = \sigma_i$.

Lehetne így: $k = \min(m, n)$, és $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_k = 0$.

D A pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós (komplex) $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei, ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a a sortérnek (konjugáltjának) és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a az oszloptérnek (konjugáltjának), hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

A $\mathbf{v}_i$ vektorokat bal, az $\mathbf{u}_i$ vektorokat jobb szinguláris vektoroknak nevezzük.

M $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r) \rightsquigarrow |\mathbf{A}\mathbf{v}_i| = \sigma_i$.

Lehetne így: $k = \min(m, n)$, és $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_k = 0$.

P $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})\}$

$$\begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix},$$

D A pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós (komplex) $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei, ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a a sortérnek (konjugáltjának) és $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a az oszloptérnek (konjugáltjának), hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

A $\mathbf{v}_i$ vektorokat bal, az $\mathbf{u}_i$ vektorokat jobb szinguláris vektoroknak nevezzük.

M $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i = 1, 2, \dots, r) \rightsquigarrow |\mathbf{A}\mathbf{v}_i| = \sigma_i$.

Lehetne így: $k = \min(m, n)$, és $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_k = 0$.

P $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})\}$

$$\begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow \sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 5$.

J Jelölések

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$$

$$\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

Jelölések

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$$

$$\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma \mathbf{u}_i \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1\boldsymbol{\Sigma}_1$$

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

Jelölések

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$$

$$\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma \mathbf{u}_i \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1$

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$-ből $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$-ből ONB:

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}$-ben $\mathbf{V}_2$ oszlopvektorai $\perp \mathcal{S}$ ($\mathbb{C}$-ben $\perp \bar{\mathcal{S}}$-re) $\rightsquigarrow$ $r < i \leq n$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

$\mathbb{R}$-ben $\mathbf{V}_2$ oszlopvektorai $\perp \mathcal{S}$ ($\mathbb{C}$-ben $\perp \bar{\mathcal{S}}$-re) $\rightsquigarrow r < i \le n$ esetén $\mathbf{Av}_i = \mathbf{0}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AV} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{Av}_1 & \dots & \mathbf{Av}_r & \mathbf{Av}_{r+1} & \dots & \mathbf{Av}_n \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \dots & \sigma_r\mathbf{u}_r & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right] \\
&= \mathbf{U\Sigma},
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}$-ben $\mathbf{V}_2$ oszlopvektorai $\perp \mathcal{S}$ ($\mathbb{C}$-ben $\perp \bar{\mathcal{S}}$-re) $\rightsquigarrow$ $r < i \le n$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AV} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{v}_r & \mathbf{A}\mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \dots & \sigma_r\mathbf{u}_r & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right] \\
&= \mathbf{U\Sigma},
\end{aligned}
$$

azaz $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n} = \mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}$, blokkmátrix alakban

$$
\mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right].
$$

D Szinguláris érték szerinti felbontás, vagy szinguláris felbontás:
$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$

D Szinguláris érték szerinti felbontás, vagy szinguláris felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$

Redukált szinguláris felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^{\mathsf{H}}$

D Szinguláris érték szerinti felbontás, vagy szinguláris felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$

Redukált szinguláris felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^{\mathsf{H}}$

Szinguláris érték szerinti diadikus felbontás vagy a szinguláris felbontás diadikus alakja

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^{\mathsf{T}} + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/3 & -4/3 & 2/3 \\ -8/3 & 8/3 & -4/3 \\ 8/3 & -8/3 & 4/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 & -2/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/3 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}.$$

M Ötlet: $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^H\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H = \mathbf{V}\Sigma^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H = \mathbf{V}\Sigma^H\Sigma\mathbf{V}^H$

M Ötlet: $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = (\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma V}^{\mathsf{H}}$

Ez $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$.

M Ötlet: $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$

Ez $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$.

SVD kiszámítása:

M Ötlet: $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{H})^\mathsf{H}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{H} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{H} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^\mathsf{H}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{H}$

Ez $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\boldsymbol{\Sigma}^\mathsf{H}\boldsymbol{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \ge 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\boldsymbol{\Sigma}^\mathsf{H}\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait ($\mathbf{x}_i$),

M Ötlet: $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = (\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma V}^{\mathsf{H}}$

Ez $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait $(\mathbf{x}_i)$,

2 a sajátértékek gyökei a szinguláris értékek $(\sigma_i = \sqrt{\lambda_i})$,

M Ötlet: $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H)^H\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^H\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$

Ez $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\mathbf{\Sigma}^H\mathbf{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\mathbf{\Sigma}^H\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait ($\mathbf{x}_i$),

2 a sajátértékek gyökei a szinguláris értékek ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$),

3 a jobb szinguláris vektorok a sajátvektorok ($\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i/|\mathbf{x}_i|$),

M Ötlet: $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$

Ez $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\mathbf{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait ($\mathbf{x}_i$),

2 a sajátértékek gyökei a szinguláris értékek ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$),

3 a jobb szinguláris vektorok a sajátvektorok ($\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i / |\mathbf{x}_i|$),

4 bal szinguláris vektorok: mivel $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i / \sigma_i$,

M Ötlet: $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = (\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H})^\mathsf{H}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H} = \mathbf{V\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H} = \mathbf{V\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{\Sigma V}^\mathsf{H}$

Ez $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait $(\mathbf{x}_i)$,

2 a sajátértékek gyökei a szinguláris értékek $(\sigma_i = \sqrt{\lambda_i})$,

3 a jobb szinguláris vektorok a sajátvektorok $(\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i/|\mathbf{x}_i|)$,

4 bal szinguláris vektorok: mivel $\mathbf{Av}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = \mathbf{Av}_i/\sigma_i$,

*4 alternatíva: a bal szinguláris vektorok megegyeznek az $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ sajátvektoraival, M Ötlet: $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$

Ez $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \ge 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait ($\mathbf{x}_i$),

2 a sajátértékek gyökei a szinguláris értékek ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$),

3 a jobb szinguláris vektorok a sajátvektorok ($\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i / |\mathbf{x}_i|$),

4 bal szinguláris vektorok: mivel $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i / \sigma_i$,

*4 alternatíva: a bal szinguláris vektorok megegyeznek az $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ sajátvektoraival,

5 a szinguláris vektorokból fölírható $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{U}_1$, a redukált szinguláris felbontás és a diadikus alak,

M Ötlet: $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H)^H\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^H\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H$

Ez $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ spektrálfelbontása: $\mathbf{V}$ ortogonális (unitér), $\boldsymbol{\Sigma}^H\boldsymbol{\Sigma}$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\boldsymbol{\Sigma}^H\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

1 meghatározzuk $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sajátértékeit (λ_i) és sajátvektorait ($\mathbf{x}_i$),

2 a sajátértékek gyökei a szinguláris értékek ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$),

3 a jobb szinguláris vektorok a sajátvektorok ($\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i/|\mathbf{x}_i|$),

4 bal szinguláris vektorok: mivel $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i/\sigma_i$,

*4 alternatíva: a bal szinguláris vektorok megegyeznek az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ sajátvektoraival,

5 a szinguláris vektorokból fölírható $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{U}_1$, a redukált szinguláris felbontás és a diadikus alak,

6 a $\mathbf{V}$-hez ki kell egészíteni a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ vektorokat ONB-sá (hasonlóképp $\mathbf{U}$-hoz)

T **A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége:** Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

T A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége: Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^H = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$

T A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége: Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, így ortogonálisan diagonalizálható,

T A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége: Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^H = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, így ortogonálisan diagonalizálható,

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, így minden sajátértéke nemnegatív,
ui. $\mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^H(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0.$

T A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége: Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, így ortogonálisan diagonalizálható,

$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, így minden sajátértéke nemnegatív,
ui. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathsf{H}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

$\mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$, így ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ rendezés után), $\lambda_i > 0$, ha $1 \leq i \leq r$, és $\lambda_i = 0$, ha $r < i \leq n$

T A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége: Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, így ortogonálisan diagonalizálható,

$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, így minden sajátértéke nemnegatív, ui. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathsf{H}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

$\mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$, így ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ rendezés után), $\lambda_i > 0$, ha $1 \leq i \leq r$, és $\lambda_i = 0$, ha $r < i \leq n$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, ha $1 \leq i \leq r$

T A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége: Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^H = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, így ortogonálisan diagonalizálható,

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, így minden sajátértéke nemnegatív, ui. $\mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^H(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

$\mathrm{r}(\mathbf{A}^H\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$, így ($\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$ rendezés után), $\lambda_i > 0$, ha $1 \le i \le r$, és $\lambda_i = 0$, ha $r < i \le n$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, ha $1 \le i \le r$

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ sajátértékei egyértelműek, ezért $\mathbf{A}$ szinguláris értékei is azok

T **A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége:** Minden r-rangú komplex $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik r szinguláris értéke. Ezek megegyeznek $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ (illetve az $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$) pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeivel. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.

B $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ önadjungált: $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^H = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, így ortogonálisan diagonalizálható,

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, így minden sajátértéke nemnegatív,
ui. $\mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^H(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

$\mathrm{r}(\mathbf{A}^H\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$, így ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ rendezés után), $\lambda_i > 0$, ha $1 \leq i \leq r$, és $\lambda_i = 0$, ha $r < i \leq n$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, ha $1 \leq i \leq r$

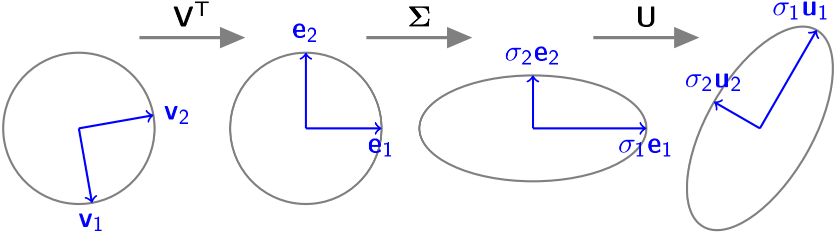
$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ sajátértékei egyértelműek, ezért $\mathbf{A}$ szinguláris értékei is azok

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 0-tól különböző sajátértékei megegyeznek

P SVD hatása egységkörön 2-rangú 2×2-es mátrixszal: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi ortogonális leképezéssel (forgatás vagy tükrözés), ott $\mathbf{\Sigma}$ tengelyirányban nyújtja/összenyomja, végül az ortogonális $\mathbf{U}$ hat rá.

P SVD hatása egységkörön 2-rangú 2×2-es mátrixszal: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi ortogonális leképezéssel (forgatás vagy tükrözés), ott $\mathbf{\Sigma}$ tengelyirányban nyújtja/összenyomja, végül az ortogonális $\mathbf{U}$ hat rá.

$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}\mathbf{x}$:



P 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix: $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, így hatása: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

P 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix: $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, így hatása: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

$\boldsymbol{\Sigma}$ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$, a harmadik tengely irányával párhuzamosan vetít: $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

P 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix: $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, így hatása: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

$\mathbf{\Sigma}$ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$, a harmadik tengely irányával párhuzamosan vetít: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

A kép nem egy ellipszisvonal, hanem a teljes általa határolt tartomány.

P 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix: $\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$ ortogonális, így hatása: $\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

$\mathbf{\Sigma}$ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$, a harmadik tengely irányával párhuzamosan vetít: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

A kép nem egy ellipszisvonal, hanem a teljes általa határolt tartomány.

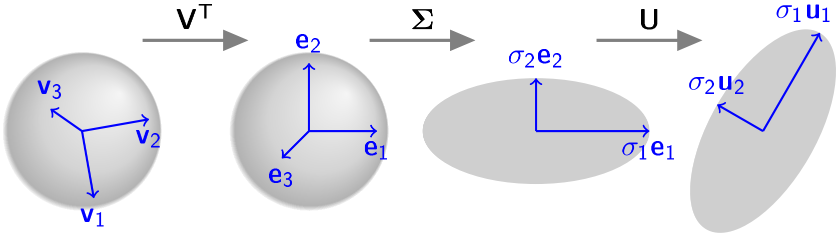
Végül az ortogonális $\mathbf{U}$ ezt elforgatja vagy tükrözi egy egyenesre.

P 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix: $\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$ ortogonális, így hatása: $\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

$\mathbf{\Sigma}$ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$, a harmadik tengely irányával párhuzamosan vetít: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

A kép nem egy ellipszisvonal, hanem a teljes általa határolt tartomány.

Végül az ortogonális $\mathbf{U}$ ezt elforgatja vagy tükrözi egy egyenesre.



T $\mathbf{A}$ egy r-rangú, $m \times n$-es valós mátrix. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés $\mathbb{R}^n$ az $\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{e} = 1$ egyenletet kielégítő, egységgömb felületén lévő pontjait, $\mathbb{R}^m$ egy r-dimenziós altere

T **A** egy r-rangú, $m \times n$-es valós mátrix. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés $\mathbb{R}^n$ az $\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{e} = 1$ egyenletet kielégítő, egységgömb felületén lévő pontjait, $\mathbb{R}^m$ egy r-dimenziós altere

- egy ellipszoidjának felületére képzi, ha $r = n$, és

T **A** egy r-rangú, $m \times n$-es valós mátrix. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés $\mathbb{R}^n$ az $\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{e} = 1$ egyenletet kielégítő, egységgömb felületén lévő pontjait, $\mathbb{R}^m$ egy r-dimenziós altere

- egy ellipszoidjának felületére képzi, ha $r = n$, és
- egy ellipszoidja által határolt tartományára képzi, ha $r < n$.

M Analógia: az $re^{\mathrm{i}\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

M Analógia: az $re^{\mathrm{i}\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

M Analógia: az $re^{\mathrm{i}\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

M Analógia: az $re^{\mathrm{i}\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B A felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}\mathbf{UV}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{UV}^{\mathsf{H}})$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^{\mathsf{H}}$.

M Analógia: az $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B A felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}\mathbf{UV}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{UV}^{\mathsf{H}})$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^{\mathsf{H}}$.

$\mathbf{P}$ önadjungált: $(\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$.

M Analógia: az $re^{i\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B A felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}\mathbf{UV}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{UV}^{\mathsf{H}})$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^{\mathsf{H}}$.

$\mathbf{P}$ önadjungált: $(\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$.

$\mathbf{P}$ pozitív szemidef. (hasonló $\mathbf{\Sigma}$-hez), ha $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{\Sigma}$ pozitív def.

M Analógia: az $re^{\mathrm{i}\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B A felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}\mathbf{UV}^\mathsf{H} = (\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H})(\mathbf{UV}^\mathsf{H})$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^\mathsf{H}$.

$\mathbf{P}$ önadjungált: $(\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}$.

$\mathbf{P}$ pozitív szemidef. (hasonló $\mathbf{\Sigma}$-hez), ha $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{\Sigma}$ pozitív def.

$\mathbf{Q}$ unitér (ortogonális), hisz két unitér (ortogonális) mátrix szorzata.

M Analógia: az $re^{i\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B A felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}\mathbf{UV}^\mathsf{H} = (\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H})(\mathbf{UV}^\mathsf{H})$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^\mathsf{H}$.

$\mathbf{P}$ önadjungált: $(\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}$.

$\mathbf{P}$ pozitív szemidef. (hasonló $\mathbf{\Sigma}$-hez), ha $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{\Sigma}$ pozitív def.

$\mathbf{Q}$ unitér (ortogonális), hisz két unitér (ortogonális) mátrix szorzata.

$\mathbf{P}$ egyértelmű (nem csak akkor, ha pozitív definit), ugyanis

$$\mathbf{AA}^\mathsf{H} = \mathbf{PQQ}^\mathsf{H}\mathbf{P}^\mathsf{H} = \mathbf{PP}^\mathsf{H} = \mathbf{P}^2,$$

és pozitív szemidefinit önadjungált mátrix négyzetgyöke egyértelmű az önadjungált pozitív szemidefinit mátrixok körében.

M Analógia: az $re^{i\varphi}$ exp. alak egy nyújtás és egy forgatás szorzata

D Polárfelbontás: egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális (unitér) mátrix szorzatára való felbontása: $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$.

T Bármely komplex (valós) négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll $\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$ alakban. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{P}$ pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B A felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}\mathbf{UV}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{UV}^{\mathsf{H}})$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^{\mathsf{H}}$.

$\mathbf{P}$ önadjungált: $(\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$.

$\mathbf{P}$ pozitív szemidef. (hasonló $\mathbf{\Sigma}$-hez), ha $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{\Sigma}$ pozitív def.

$\mathbf{Q}$ unitér (ortogonális), hisz két unitér (ortogonális) mátrix szorzata.

$\mathbf{P}$ egyértelmű (nem csak akkor, ha pozitív definit), ugyanis

$$\mathbf{AA}^{\mathsf{H}} = \mathbf{PQQ}^{\mathsf{H}}\mathbf{P}^{\mathsf{H}} = \mathbf{PP}^{\mathsf{H}} = \mathbf{P}^2,$$

és pozitív szemidefinit önadjungált mátrix négyzetgyöke egyértelmű az önadjungált pozitív szemidefinit mátrixok körében.

Ha $\mathbf{P}$ pozitív definit, akkor invertálható, így $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ is egyértelmű.

T SVD: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T$, illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$. Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^T = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T.$$

T SVD: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T$, illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$. Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^T = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T.$$

B $\mathbf{U}_1$ teljes oszloprangú, $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T$ teljes sorrangú, így

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T)^T\left(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T)^T\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_1^T\mathbf{U}_1\right)^{-1}\mathbf{U}_1^T = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-2}\mathbf{U}_1^T\\ &= \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^T.\end{aligned}$$

T SVD: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T$, illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$. Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^T = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T.$$

B $\mathbf{U}_1$ teljes oszloprangú, $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T$ teljes sorrangú, így

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T)^T\left(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T)^T\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_1^T\mathbf{U}_1\right)^{-1}\mathbf{U}_1^T = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-2}\mathbf{U}_1^T\\ &= \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^T.\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}_1^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1^T\\ \mathbf{U}_2^T\end{bmatrix} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^T.$$

T Kis rangú approximáció tétele – Eckart–Young-tétel $\mathbf{A}$ r-rangú, k-adik szinguláris értéke σ_k, jobb és bal szinguláris vektorta $\mathbf{v}_k$, illetve $\mathbf{u}_k$. Legyen

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}.$$

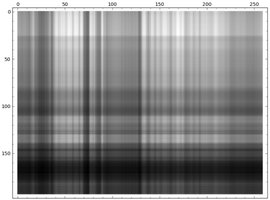
T **Kis rangú approximáció tétele – Eckart–Young-tétel** $\mathbf{A}$ r-rangú, k-adik szinguláris értéke σ_k, jobb és bal szinguláris vektorta $\mathbf{v}_k$, illetve $\mathbf{u}_k$. Legyen

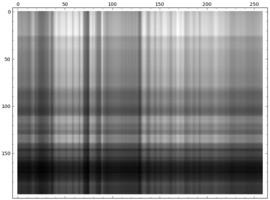
$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

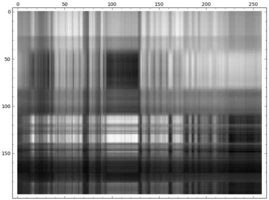
Ekkor $\mathbf{A}_k$ az $\mathbf{A}$ mátrix legjobb legföljebb k-rangú közelítése, azaz

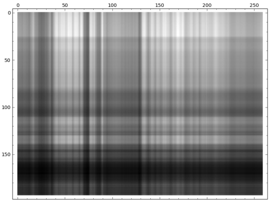
$$\min_{\mathrm{r}(\mathbf{B}) \le k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2},$$

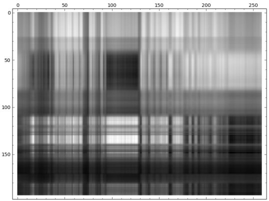
$$\min_{\mathrm{r}(\mathbf{B}) \le k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

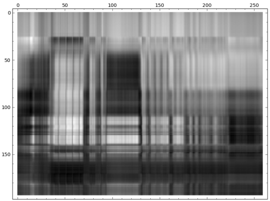

0 50 100 150 200 250
0
50
100
150

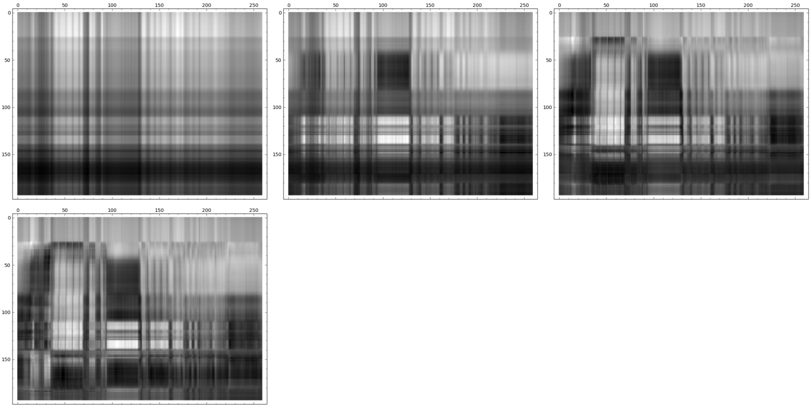

0
50
100
150
200
250
0
50
100
150

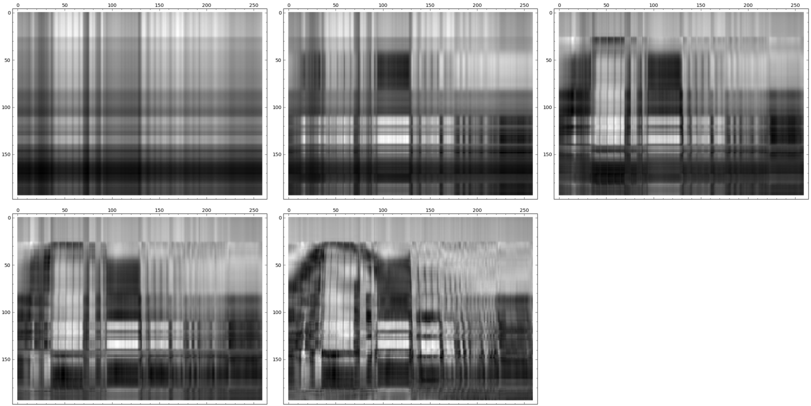

0
50
100
150
200
250
0
50
100
150

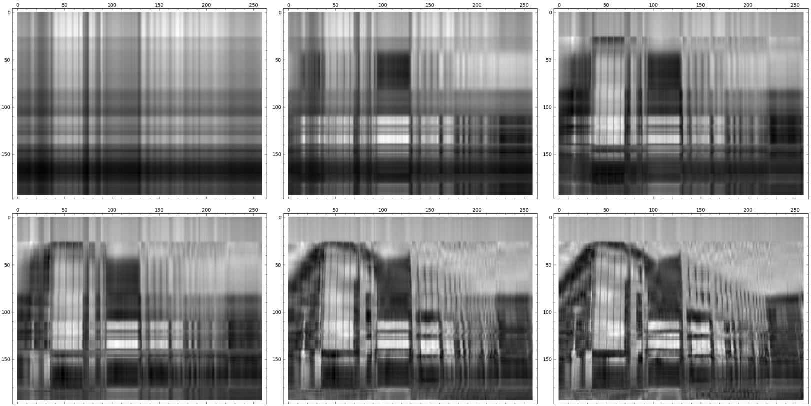

0 50 100 150 200 250
0 50 100 150

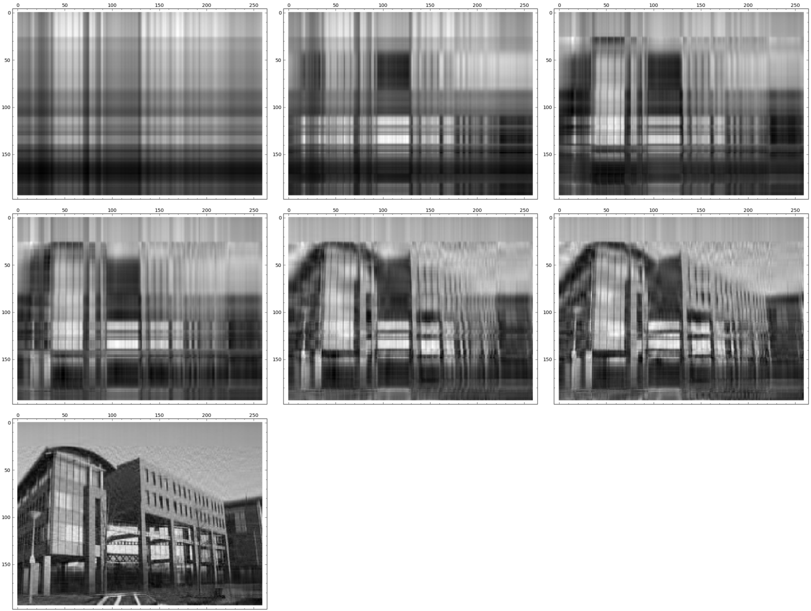

0 50 100 150 200 250
0 50 100 150

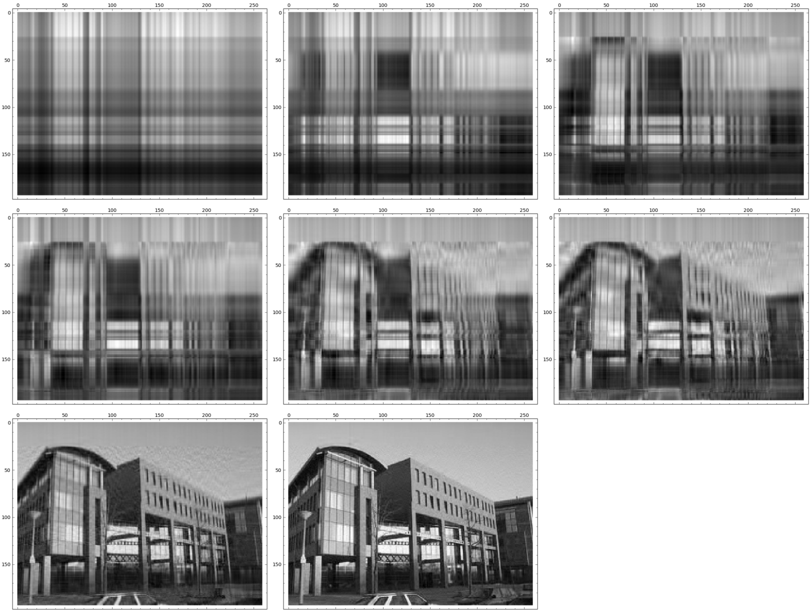

0 50 100 150 200 250
0 50 100 150

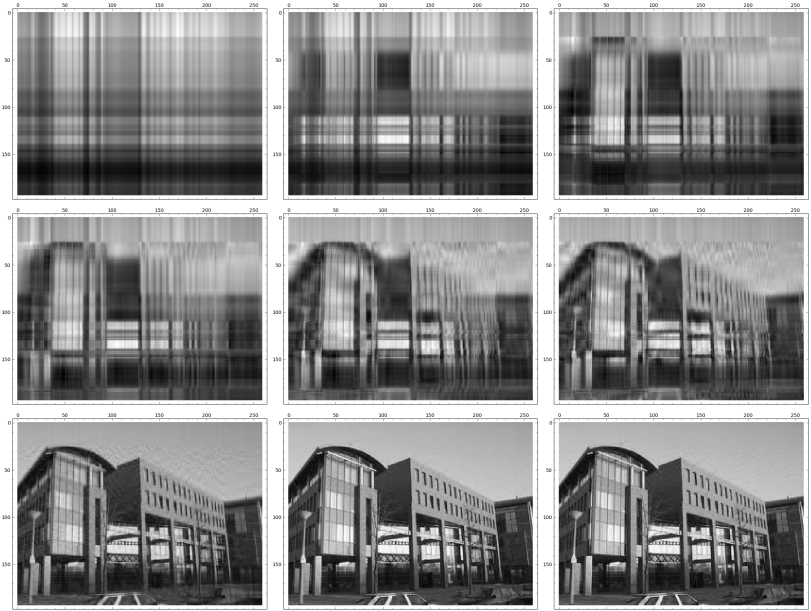

0
50
100
150
200
250

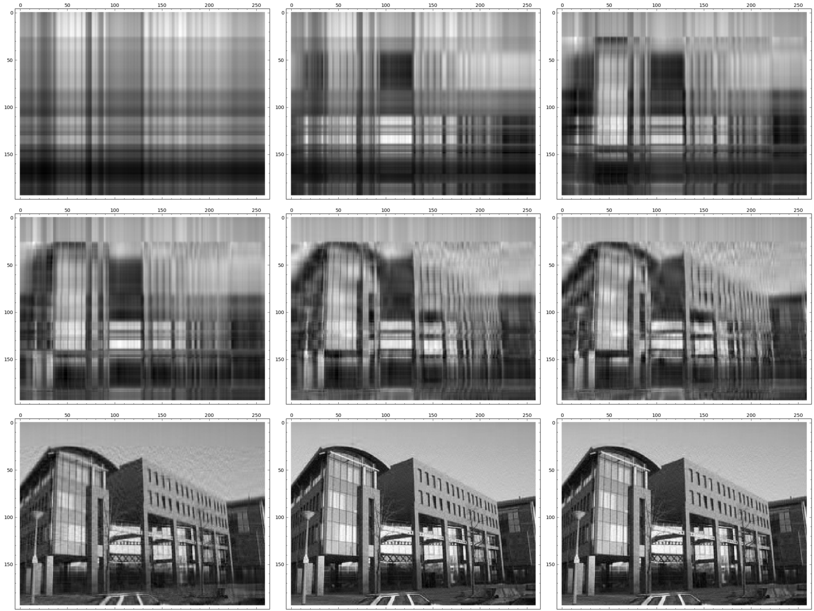

0 50 100 150 200 250
0 50 100 150


0 50 100 150 200 250
0 50 100 150

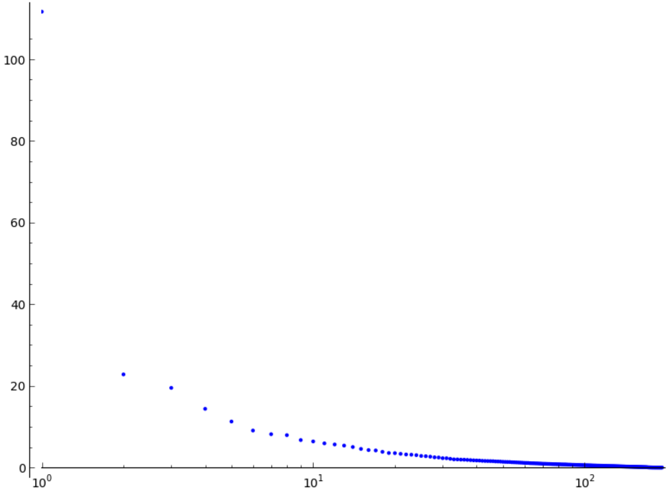



0 50 100 150 200 250
0 50 100 150


0 50 100 150 200 250
0 50 100 150



1, 2, 3, 4, 8, 12, 40, 97, 194.


100
80
60
40
20
0
10^0
10^1
10^2

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

Ö Az egy dokumentumban szereplő szavakat összekapcsolja a dokumentum tartalma, e kapcsolatokat – a szavak mögött lévő tartalmat – az SVD kiemeli, mint lényeges információt.

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

Ö Az egy dokumentumban szereplő szavakat összekapcsolja a dokumentum tartalma, e kapcsolatokat – a szavak mögött lévő tartalmat – az SVD kiemeli, mint lényeges információt.

A sorai a szavakat, oszlopai a dokumentumokat reprezentálják.

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

Ö Az egy dokumentumban szereplő szavakat összekapcsolja a dokumentum tartalma, e kapcsolatokat – a szavak mögött lévő tartalmat – az SVD kiemeli, mint lényeges információt.

A sorai a szavakat, oszlopai a dokumentumokat reprezentálják.

t_{ij} az i-edik szó gyakorisága a j-edik dokumentumban és T_i a teljes szöveggyűjteményben

$$a_{ij} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{t_{ik}}{T_i} \log \frac{t_{ik}}{T_i}}{\log n}\right) \log(1 + t_{ij}).$$

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

Ö Az egy dokumentumban szereplő szavakat összekapcsolja a dokumentum tartalma, e kapcsolatokat – a szavak mögött lévő tartalmat – az SVD kiemeli, mint lényeges információt.

A sorai a szavakat, oszlopai a dokumentumokat reprezentálják.

t_{ij} az i-edik szó gyakorisága a j-edik dokumentumban és T_i a teljes szöveggyűjteményben

$$a_{ij} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{t_{ik}}{T_i} \log \frac{t_{ik}}{T_i}}{\log n}\right) \log(1 + t_{ij}).$$

az első tényező egy csak az i-edik szónak az egész gyűjteményhez való kapcsolatától függő globális súly, a második csak a lokális érték függvénye.

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

Ö Az egy dokumentumban szereplő szavakat összekapcsolja a dokumentum tartalma, e kapcsolatokat – a szavak mögött lévő tartalmat – az SVD kiemeli, mint lényeges információt.

A sorai a szavakat, oszlopai a dokumentumokat reprezentálják.

t_{ij} az i-edik szó gyakorisága a j-edik dokumentumban és T_i a teljes szöveggyűjteményben

$$a_{ij} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{t_{ik}}{T_i} \log \frac{t_{ik}}{T_i}}{\log n}\right) \log(1 + t_{ij}).$$

az első tényező egy csak az i-edik szónak az egész gyűjteményhez való kapcsolatától függő globális súly, a második csak a lokális érték függvénye.

$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$ és közelítése $\mathbf{A}_k = \mathbf{U}_k\boldsymbol{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T}$

A latent semantic indexing (LSI) vagy latent semantic analysis (LSA)

Ö Az egy dokumentumban szereplő szavakat összekapcsolja a dokumentum tartalma, e kapcsolatokat – a szavak mögött lévő tartalmat – az SVD kiemeli, mint lényeges információt.

A sorai a szavakat, oszlopai a dokumentumokat reprezentálják.

t_{ij} az i-edik szó gyakorisága a j-edik dokumentumban és T_i a teljes szöveggyűjteményben

$$a_{ij} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{t_{ik}}{T_i} \log \frac{t_{ik}}{T_i}}{\log n}\right) \log(1 + t_{ij}).$$

az első tényező egy csak az i-edik szónak az egész gyűjteményhez való kapcsolatától függő globális súly, a második csak a lokális érték függvénye.

$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$ és közelítése $\mathbf{A}_k = \mathbf{U}_k\boldsymbol{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T}$

$\mathbf{U}_k$, illetve $\mathbf{V}_k$ oszlopainak vektorterében a szavak, illetve dokumentumok kapcsolatát a hozzájuk tartozó vektorok helyzete jellemzi

D Az $\mathbf{x}$ vektor euklideszi normája vagy más néven abszolút értéke

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

D Az $\mathbf{x}$ vektor euklideszi normája vagy más néven abszolút értéke

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

M Manhattan ($|x| + |y|$), képméretezés ($\max\{|x|, |y|\}$).

D Az $\mathbf{x}$ vektor euklideszi normája vagy más néven abszolút értéke

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

M Manhattan $(|x| + |y|)$, képméretezés $(\max\{|x|, |y|\})$.

D A $p \geq 1$ valósra az $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektor p-normája $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, míg ennek határértéke a ∞-norma, azaz $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$.

M 1-norma = rácsnorma = Manhattan-norma

M 1-norma = rácsnorma = Manhattan-norma

maximum norma = ∞-norma

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |x_i|.$$

M 1-norma = rácsnorma = Manhattan-norma

maximum norma = ∞-norma

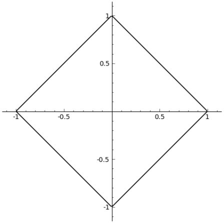
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |x_i|.$$

B a legnagyobb abszolút értékű koordináta $x_{\max}$ ($|x_i|/|x_{\max}| \le 1$)

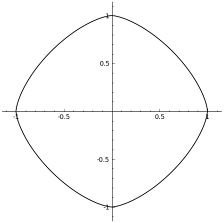
$$1 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i/x_{\max}|^p \le n.$$

Mindegyik kifejezést $1/p$-edik hatványra emelve, majd $|x_{\max}|$-szal beszorozva kapjuk, hogy

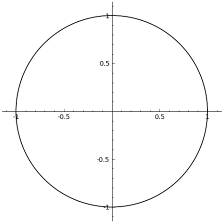
$$|x_{\max}| \le |x_{\max}| \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i}{x_{\max}} \right|^p \right)^{1/p} \le |x_{\max}| n^{1/p},$$



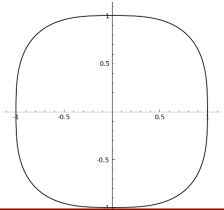
$p = 1$



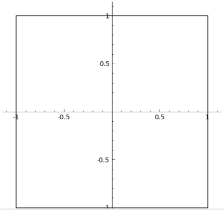
$p = \frac{3}{2}$



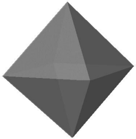
$p = 2$



$p = 3$

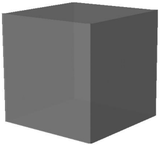


$p = \infty$



$p = 1$

$p = 2$



$p = \infty$

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény norma, ha

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény norma, ha

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény norma, ha

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $f(c\mathbf{x}) = |c|f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény norma, ha

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény norma, ha

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

M $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$ bármely $\|.\|$ normára igaz, hisz $\|-\mathbf{x}\| = |-1|\, \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $|\mathbf{x}| \geq 0$
- $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ (pozitív homogenitás)
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény norma, ha

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $f(c\mathbf{x}) = |c|f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

M $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$ bármely $\|.\|$ normára igaz, hisz $\|-\mathbf{x}\| = |-1|\,\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

M háromszögegyenlőtlenség másik alakja:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \geq \big|\,\|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\|\,\big|$$

M A háromszögegyenlőtlenség p-normánál: Minkowski-egyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p . \tag{1}$$

M A háromszögegyenlőtlenség p-normánál: Minkowski-egyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\,. \tag{1}$$

M A Hölder-egyenlőtlenség a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{y}\|_q\,, \text{ ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2}$$

M A háromszögegyenlőtlenség p-normánál: Minkowski-egyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\,. \tag{1}$$

M A Hölder-egyenlőtlenség a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_p\,\|\mathbf{y}\|_q\,,\ \text{ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2}$$

M Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma és az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

M A háromszögegyenlőtlenség p-normánál: Minkowski-egyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p . \tag{1}$$

M A Hölder-egyenlőtlenség a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q , \text{ ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2}$$

M Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma és az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

M $\max_i\{|x_i|\} \leq \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} \leq |x_1|+\cdots+|x_n|$ azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 .$$

- A háromszögegyenlőtlenség p-normánál: Minkowski-egyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p . \tag{1}$$

- A Hölder-egyenlőtlenség a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q , \text{ ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2}$$

- Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma és az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

- $\max_i\{|x_i|\} \le \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} \le |x_1|+\cdots+|x_n|$ azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 .$$

- Másrészt

$$\|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 , \quad \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{és} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$

- A háromszögegyenlőtlenség p-normánál: Minkowski-egyenlőtlenség:
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p . \tag{1}$$
- A Hölder-egyenlőtlenség a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:
$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q , \text{ ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2}$$
- Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma és az
$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\ne\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$
- $\max_i\{|x_i|\} \le \sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2} \le |x_1|+\dots+|x_n|$ azaz
$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 .$$
- Másrészt
$$\|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 , \quad \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{és} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$
- Minden norma folytonos függvény.

D A $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \leq c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \leq d\,\|.\|_a$.

D A $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \le c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \le d\,\|.\|_a$.

M Az 1-, 2- és ∞-normák ekvivalensek

D A $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \leq c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \leq d\,\|.\|_a$.

M Az 1-, 2- és ∞-normák ekvivalensek

T A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett bármely két norma ekvivalens ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$).

D A $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \le c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \le d\,\|.\|_a$.

M Az 1-, 2- és ∞-normák ekvivalensek

T A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett bármely két norma ekvivalens ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$).

M Ez csak véges dimenziós terekben igaz, itt tehát a konvergenciakérdésekhez bármelyik norma jó.

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}.$$

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}.$$

B $[\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}]_{jj} = \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\sigma_i^2}.$$

B $[\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}]_{jj} = \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$

nyom = sajátértékek összege

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\sigma_i^2}.$$

B $[\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}]_{jj} = \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$
nyom = sajátértékek összege

Á Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\sigma_i^2}.$$

B $[\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}]_{jj} = \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$

nyom = sajátértékek összege

Á Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra $\|\mathbf{Ax}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F\,\|\mathbf{x}\|_2$.

B Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségből:

$$\|\mathbf{Ax}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2\,\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2\,\|\mathbf{x}\|_2^2.$$

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c| \, \|\mathbf{A}\|$,

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c| \, \|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c| \, \|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c| \, \|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált mátrixnormának nevezzük.

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c| \, \|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált mátrixnormának nevezzük.

M Jelölés: $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c| \, \|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált mátrixnormának nevezzük.

M Jelölés: $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$

M Ha lineáris leképezésre értelmezzük, operátornormáról beszélünk.

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c|\,\|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált mátrixnormának nevezzük.

M Jelölés: $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$

M Ha lineáris leképezésre értelmezzük, operátornormáról beszélünk.

M A normák ekvivalenciájából $\rightsquigarrow$ bármely normában az egységgömb korlátos és zárt $\rightsquigarrow$ a $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ függvénynek van maximuma és minimuma

D $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $\|c\mathbf{A}\| = |c|\,\|\mathbf{A}\|$,
- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált mátrixnormának nevezzük.

M Jelölés: $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$

M Ha lineáris leképezésre értelmezzük, operátornormáról beszélünk.

M A normák ekvivalenciájából $\rightsquigarrow$ bármely normában az egységgömb korlátos és zárt $\rightsquigarrow$ a $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ függvénynek van maximuma és minimuma

M a definíció a ekvivalens alakjai

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ekkor

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút oszlopösszeg}, \tag{3}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút sorösszeg}, \tag{4}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\|\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{5}$$

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ekkor

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút oszlopösszeg,} \tag{3}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút sorösszeg,} \tag{4}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\|\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{5}$$

Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható, akkor

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{6}$$

ahol σ_n az $\mathbf{A}$ legkisebb (pozitív) szinguláris értéke.

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ekkor

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút oszlopösszeg}, \tag{3}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút sorösszeg}, \tag{4}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\|\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{5}$$

Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható, akkor

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{6}$$

ahol σ_n az $\mathbf{A}$ legkisebb (pozitív) szinguláris értéke.

M Az 1-, a ∞- és a 2-normára szokásos másik elnevezés: oszlopnorma, sornorma és spektrálnorma.