

Felsőbb matematika, vizsgatematika

► jelentése: bizonyítás is.

2014 V1.0

Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlenség, Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, vektor vetítése egy másik vektor egyenesére. Számtestből képzett rendezett n -esek tere Test, vektortér, euklideszi tér.

Gauss-Jordan-kiküszöbölés, elemi sorműveletek hatása a sor- és oszloptérre, altér dimenziója, vektorrendszer/mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele, a homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásainak terei. Nulltér, ► a nulltér altér. Bázistétel.

Báziscsere, az áttérés mátrixa. Bázisfelbontás. Mátrixinverz. LU-felbontás, egyenletrendszer megoldása és mátrixinvertálás LU-felbontással. PLU-felbontás.

Lineáris leképezések, ► minden (végesdimenziós terek közti) lineáris leképezéshez létezik mátrix, mely azt a leképezést generálja. Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban. Mátrixok hasonlósága, hasonlóságra invariáns tulajdonságok. Deriváltleképezés, Jacobi-mátrix.

Térbeli forgatás mátrixa. Altérre való merőleges vetítés mátrixa, Alterek direkt összege. ► Merőleges vetítés \mathbb{R}^n egy alterére. Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa, melyik vetítés mátrixa. Altértől való távolság. Vektor egyértelmű előállíthatósága egy \mathcal{A} - és egy \mathcal{A}^\perp -beli vektor összegeként, ► $\text{rang}(\mathbf{A}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n$, ► $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$. ► megoldható egyenletrendszer egyértelmű megoldása a sortérben és e megoldás abszolút értékének minimalitása. Ellentmondásos egyenletrendszer optimális megoldása a normálegyenletből. Pszeudoinvert és tulajdonságai, a Moore–Penrose-tétel.

► Páronként ortogonális vektorok függetlensége. Legjobb közelítés ortonormált bázis esetén. Ortogonális mátrixok és tulajdonságaik. A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi. Householder-tükrözés, Givens-forgatás. ► Gram-Schmidt ortogonalizáció. QR-felbontás, ► a QR-felbontás létezése, \mathbf{R} kiszámítása \mathbf{Q} és \mathbf{A} ismeretében. QR-felbontás Householder-tükrözéssel, Givens-forgatással. ► Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással. Fourier-mátrix, DFT.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér, sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix hatványának sajátértékei. Szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, önadjungált, ferdén önadjungált, ortogonális, unitér,

nilpotens mátrix sajátértékei. ► Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek; megegyezik spektrumuk, rangjuk, nyomuk, determinánsuk, nullitásuk. Az algebrai és geometriai multiplicitás viszonya. Diagonalizálhatóság. ► a diagonalizálhatósággal ekvivalens állítások (8.25, 8.34). Sajátfelbontás. Cayley–Hamilton-tétel. ► Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineáris függetlensége. Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása. Gerschgorin-körök, Gerschgorin-tétel. Hatványiteráció (hatványmódszer).

Normális mátrixok, önadjungált és unitér mátrix determinánsa; mátrix unitér/ortogonális diagonalizálhatósága, Schur-felbontás, ► \mathbf{A} pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális. Pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus. Felső Hessenberg-mátrix. Kvadratikus alak, főtengetytétel, definit és indefinit mátrixok, defínitség megállapítása a sajátértékekből és a főminorokból.

Szinguláris értékek, szinguláris értékek szerinti felbontás (SVD) és annak redukált alakja, ► SVD létezése. SVD és a négy alapvető altér kapcsolata. Az SVD szemléltetése körön/gömbön. Polárfelbontás, általánosított inverz, ellentmondásos egyenletrendszer megoldása általánosított inverzzel. Eckart–Young-tétel.

Vektornorma (p -norma), normák ekvivalenciája, mátrixnormák (Frobenius, indukált, operátornorma, 1-norma, ∞ -norma) és kiszámításuk. Normált tér, parallelogramma-tétel és skaláris szorzat létezése normált térben.

Invariáns altér és invariáns alterek direkt összegéne és a blokkmátrix kapcsolata. Általánosított sajátvektor, Jordan-lánc, Jordan-bázis konstrukciója. Jordan-normálalak, Jordan-felbontás.

Mátrix spektrumán definiált függvény, mátrixfüggvény. Mátrixfüggvény definíciója polinominterpolációval, Hermite-féle interpolációs polinom. Homogén lineáris differenciálegyenletrendszer megoldása.

Véges Markov-láncok, átmenetmátrix, Perron-tétel pozitív mátrixokra, Collatz–Wielandt-formula, irreducibilis és primitív mátrixok, Perron–Frobenius-tételek, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{A}/r)^k$ értéke ha \mathbf{A} primitív.

Duplán sztochasztikus mátrixok, Frobenius–König-tétel, Birkhoff-tétel.

Lineáris mátrixegyenletek: Kronecker-szorzat és a vec függvény, a lineáris mátrixegyenlet, speciálisan a Sylvester-féle egyenlet megoldása.