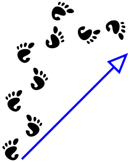
A lineáris algebra forrásai: vektorok

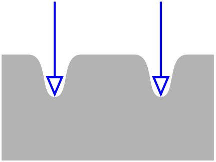
Wettl Ferenc

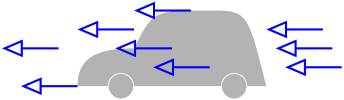
2014. szeptember 23.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor

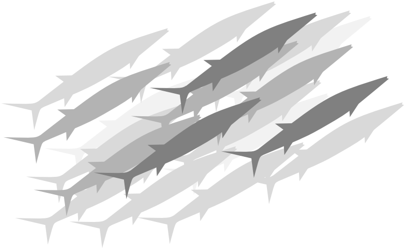
Kötött és szabad vektorok:

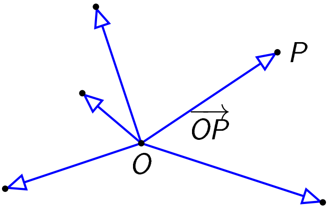






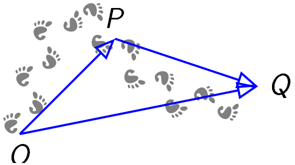
„Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”



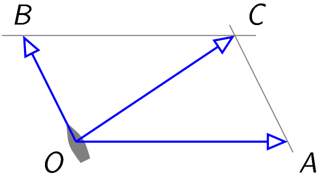


Vektorösszeadás, skalárral szorzás

Vektorösszeadás (háromszögmódszer, parallelogramma-módszer)



(a)



(b)

Skalárral szorzás

Műveleti tulajdonságok

Tétel (A vektorműveletek tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

c) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

d) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

e) $r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$

f) $r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$

g) $(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$

h) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ és $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

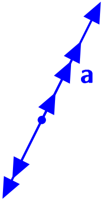
Lineáris kombináció

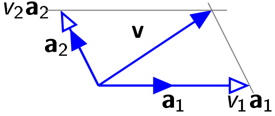
Definíció (Lineáris kombináció)

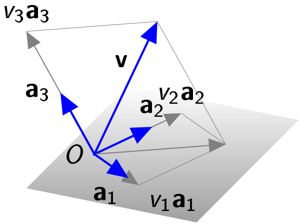
Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.





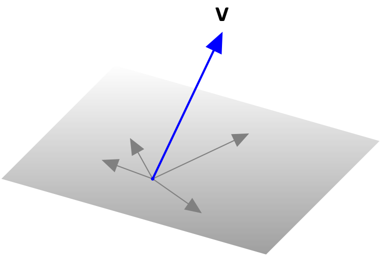


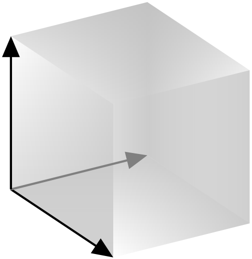
Lineáris függetlenség

Definíció (Vektorok függetlensége)

Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor lineárisan független az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok lineárisan függetlenek, ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük lineárisan függ a többitől, akkor e vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.

Lineáris függetlenség, egyértelmű lineáris kombináció



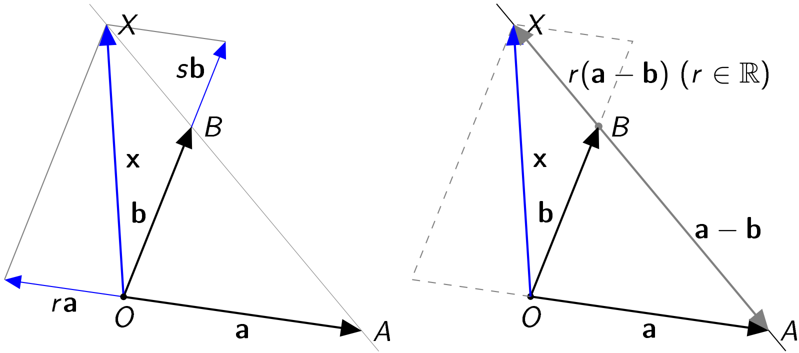


Tétel (Térbeli vektor felbontása)

Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Speciális lineáris kombinációk

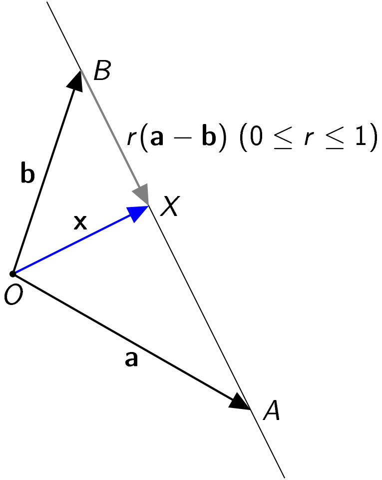


Állítás (Két ponton átmenő egyenes jellemzése)

Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ alakú lineáris kombináció végpontja pontosan akkor mutat az A és B ponton átmenő egyenes egy pontjába, ha $r + s = 1$.

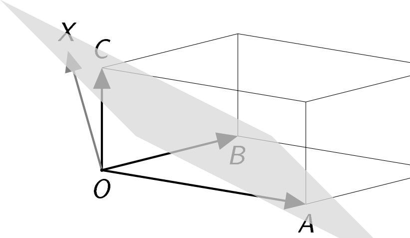
Speciális lineáris kombinációk

AB szakasz $(0 \leqslant r, s, \leqslant 1)$

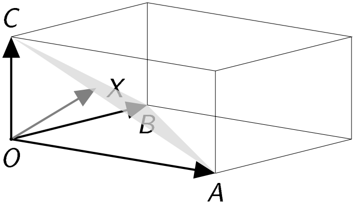


Speciális lineáris kombinációk

Ugyanezek a térben (három pont által kifeszített sík, háromszög):

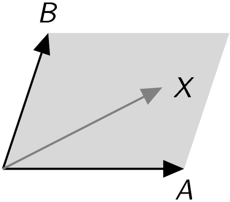


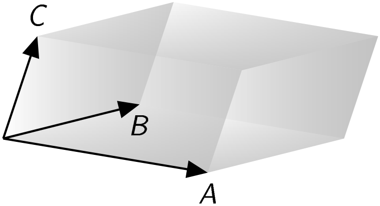
$r + s + t = 1$



$r + s + t = 1$ és $0 \leq r, s, t \leq 1$

Parallelogramma, parallelepipedon:





Skaláris szorzás

Definíció (Két vektor skaláris szorzata)

Két vektor skaláris szorzatán a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

Tétel (A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Hosszúság és szög

Vektor hossza: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, azaz

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Két pont (vektor) távolsága

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Két vektor által bezárt szög:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \tag{1}$$

mivel a $[0, \pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

Három fontos összefüggés

Tétel (Pithagorász-tétel)

Az **a** és **b** vektorokra pontosan akkor teljesül az $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$összefüggés, ha **a** és **b** merőlegesek egymásra.

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

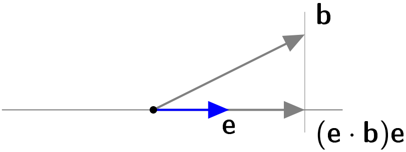
Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)

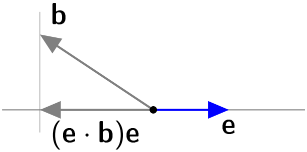
Bármely két **a** és **b** vektorra $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Egységvektorral való szorzás

Tétel (Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése)

Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\hat{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.

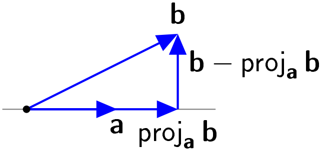




Merőleges vetítés

$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektora. Eszerint

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$



Tétel (Vektor felbontása merőleges összetevőkre)

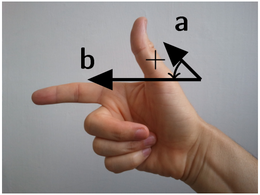
Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetülete

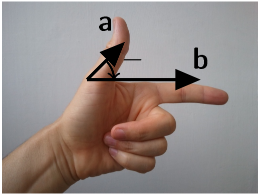
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

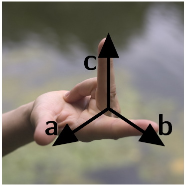
A $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ egyenesére merőleges összetevője

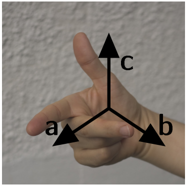
$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

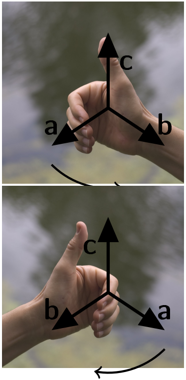
Orientáció

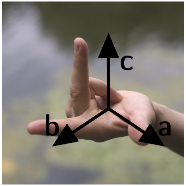


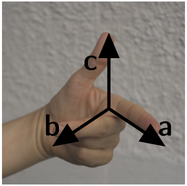










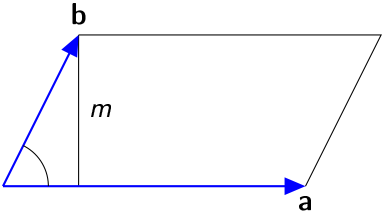


Vektori szorzat

Definíció (Vektori szorzat)

A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
- iránya merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.



Vegyes szorzat

A parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

Definíció (Vegyes szorzat)

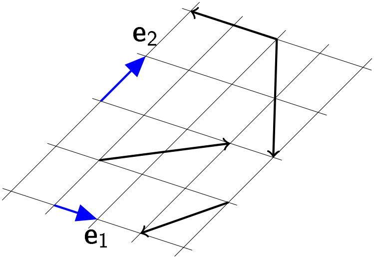
A 3-dimenziós tér három tetszőleges **a**, **b** és **c** vektorából képzett

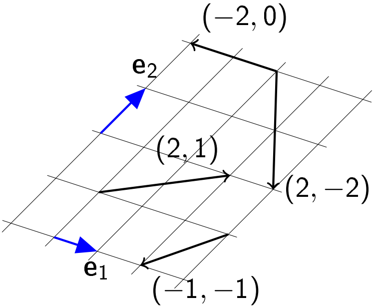
$$\mathbf{abc} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

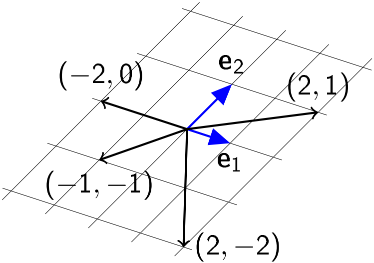
kifejezést a három vektor vegyes szorzatának nevezzük.

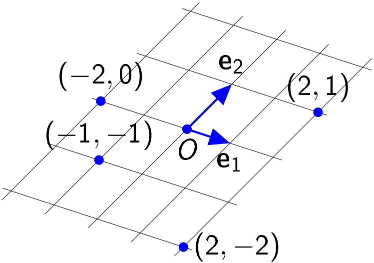
$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

Vektorok és pontok koordinátái









Műveletek koordinátás alakban

Példa (Skaláris szorzás koordinátarendszerben)

Alapvektorok: az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.

Megoldás

Az alapvektorok skaláris szorzatai:

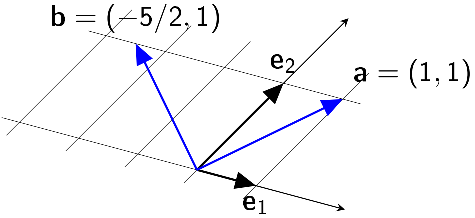
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (1 - \frac{5}{2})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

tehát a két vektor merőleges egymásra.

Műveletek koordinátás alakban



$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\
&= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\
&= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.
\end{aligned}
$$

Tétel (Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai)

Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c, d két teszőleges valós, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \ldots, 0)$ vektort és $-\mathbf{u}$ a $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ vektort. Ekkor

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	a + művelet nem vezet ki $\mathbb{R}^n$-ből
b)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
c)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	csoportosítható (asszociatív)
d)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
e)	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	ellentett vektor
f)	$c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$	e szorzás nem vezet ki $\mathbb{R}^n$-ből
g)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	a két szorzás kompatibilis
h)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
i)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív
j)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 1-gyel

Következmény

1) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
3) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$
4) a skalár hátra is írható, azaz $c\mathbf{u} = \mathbf{u}c$ és így $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$

Lineáris függetlenség

Tétel (Lineáris függetlenség)

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, $c_2, \ldots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Lineáris összefüggőség

Tétel (Lineáris összefüggőség)

Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \,\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben

Tétel (A skaláris szorzás tulajdonságai)

Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

a)	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
b)	$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$	disztributív
c)	$(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis
d)	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.	

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció (Abszolút érték, szög, merőlegesség, távolság)

Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora.

- Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinuszát az alábbi törttel definiáljuk:
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{2}$$
- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két vektor távolságának nevezünk, a
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{3}$$