Felsőbb matematika vizsga – 2015-01-06

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Írja le a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget! *(1 pont)*

$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

2. Hány megoldása lehet az alábbi egyenletrendszereknek: *(2 pont)*

a) n ismeretlenes, k egyenletből álló, valós, $k < n$;

b) n ismeretlenes, k egyenletből álló, valós, $k > n$;

c) n ismeretlenes, F_5 fölötti, az együtthatómátrix rangja $n-2$;

Az egyenletrendszer legyen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
a) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \le k < n \to 0$ vagy ∞ megoldás.
b) 0, 1 vagy ∞ megoldás.
c) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n-2 \to 2$ szabad paraméter $\to 5^2 = 25$ megoldás.

3. Legyen $\mathbf{A}$ egy valós 2015×2015-ös mátrix, mely kielégíti az $\mathbf{A}^\intercal = -\mathbf{A}$ egyenlőséget. Mennyi lehet a determinánsának értéke? *(2 pont)*

$\det(\mathbf{A}) = 0$, mert
$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\intercal)$
$\det(-\mathbf{A}) = (-1)^{2015}\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$
$\to \det(\mathbf{A}) = 0$

4. A Gershgorin-körök felhasználásával mutassuk meg, hogy a

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak minden sajátértéke valós. *(2 pont)*

A sorokhoz tartozó Gershgorin-körök közül a 9-hez egy valós gyök tartozik, az oszlopok szerint a 0-hoz és -9-hez tartozó gyök valós, így a negyedik gyök is az.

5. Ismerjük az $\mathbf{A}$ mátrix bal és jobb Perron-vektorát: $\mathbf{p} = (.1, .2, .4, .3)$, $\mathbf{q} = (.4, .2, .2, .2)$, valamint spektrálsugarát: $r = 3$. *(a)* Milyen feltétellel létezik a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)^n$$

határérték? *(b)* Mennyi ez a határérték? *(2 pont)*

Perron–Frobenius-tétel $\to$ a határérték pontosan akkor létezik, ha $\mathbf{A}$ **primitív**.

A határérték $\frac{\mathbf{pq}^\intercal}{\mathbf{q}^\intercal\mathbf{p}} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 16 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$.

6. A 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixnak a 2015 hétszeres sajátértéke, és Jordan-féle normálalakjában 3 db 1×1-es és 1 db 4×4-es Jordan blokk van. Adjuk meg minden pozitív k egész esetén az $(\mathbf{A} - 2015\mathbf{I})^k$ mátrix nullterének dimenzióját! *(2 pont)*

1.mo: $\mathbf{A} - 2015\mathbf{I} \sim \mathbf{J} - 2015\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right]$, hatványainak rangja 3, 2, 1, 0. Így a nullterek dimenziói $7 - \mathrm{r}$, azaz 4, 5, 6, 7, 7,...
2. mo: A d_i'': $3, 0, 0, 1, 0, \dots \to d_i'$: $4, 1, 1, 1, 0, \dots \to d_i$: $3, 2, 1, 0, \dots \to 4, 5, 6, 7, \dots$.

7. Adva van az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix. Igaz-e, hogy van olyan másodfokú p polinom, melyre $p(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}}$? Ha igen, van-e olyan C paraméter, melyre $C\mathbf{A}^2 - e^2\mathbf{A} + e^2\mathbf{I} = e^{\mathbf{A}}$, és mennyi C értéke? *(2 pont)*

1. mo: interp. polinommal: $(e^x)" = e^x$, $(Cx^2 - e^2x + e^2)" = 2C$, a 2-ben ezek értéke egyenlő, így $e^2 = 2C$, tehát $C = e^2/2$.
2. mo: Felírva az $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}, \mathbf{I}$ és $e^{\mathbf{A}}$ mátrixokat, behelyettesítés után adódik C. A második kérdésre pozitív választ kaptunk, ez egyben az első kérdést is megválaszolja.

8. Mondja ki az Eckart–Young-tételt. *(2 pont)*

Ld. jegyzet.

9. Hogyan található meg egy egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása a QR-felbontással? *(a)* Igazolja az állítást! *(b)* Miért érdemes e módszert használni? *(5+1 pont)*

Ld. jegyzet.

10. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(4 pont)*

Ld. jegyzet