Felsőbb matematika vizsga – 2015-01-13

Név ____ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Mondja ki a Collatz-Wielandt formulát! *(1 pont)*

> $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, akkor $\varrho = \max\limits_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}}} \min\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i} = \max\limits_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}}} \max\limits_{c\mathbf{x} \leq \mathbf{A}\mathbf{x}} c$

2. Adja meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzének sajátértékeit! *(1 pont)*

> $1/9,\ 1/4,\ -1/4,\ 1/3$

3. Adja meg a képterét, magterét, illetve ezek dimenzióját az alábbi lineáris leképezésnek! *(3 pont)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; f(a, b, c) = (a, b, 0).$$

> $\operatorname{Ker} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_3)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

4. Írja fel a tér $\mathbf{e} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ vektor körüli 45 fokos forgatásának standard bázisbeli mátrixát! (A mátrixműveleteket nem kell elvégezni!) *(2 pont)*

> $\mathbf{e}$-t $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ az $(1,0,0)$-ba forgatja, így $\mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{B}$ a forgatómátrix.

5. Egészítse ki az alábbi mátrixot úgy, hogy önadjungált legyen! *(1 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 3i & 4 & * \\ 1+2i & 4-i & 5 \end{bmatrix}$$

> $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3i & 1-2i \\ 3i & 4 & 4+i \\ 1+2i & 4-i & 5 \end{bmatrix}$

6. Írja fel a csupa egyesből álló 2015×2015-ös mátrix Jordan-féle normálalakját, és konstruálja meg egy Jordan-bázisát! *(2 pont)*

> $\lambda_1 = 2015$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$
> $\lambda_{2,3,\ldots} = 0$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, \ldots)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0, \ldots)$,$\ldots \mathbf{v}_{2015} = (1, 0 \ldots, -1)$,
> $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2015 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

7. Írjon fel olyan 2×2-es (komplex) mátrixot, amelyre $\operatorname{rang}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \neq \operatorname{rang}(\mathbf{A})$! *(2 pont)*

> Valós nem lehet, mert arra igaz az összefüggés. Pl. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$.

8. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es valós mátrix. Tudjuk, hogy a nulla nincs benne a Gersgorin-körök uniójában. Hány megoldása van az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek, ahol $\mathbf{b}$ tetszőleges nemnulla vektor? (Tömör indoklást kérünk) *(2 pont)*

> 0 nincs a Gershgorin-körökben $\rightsquigarrow$ 0 nem s.ért. $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$ invertálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ egyértelmű megoldás.

9. Mondja ki a Moore–Penrose-tételt! *(2 pont)*

10. Igazolja, hogy egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik n független sajátvektora! *(4 pont)*

11. Mondja ki és bizonyítsa be a Gram-Schmidt ortogonalizációról szóló tételt! *(5 pont)*