Felsőbb matematika vizsga – 2015-01-20

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Definiálja egy mátrix Frobenius-normájának fogalmát! *(1 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ (a többi képletet is elfogadtuk)

2. Hány darab nemnulla elem van egy 2015×2015-ös (komplex) unitér mátrix Jordan-féle normálalakjában? (rövid indoklást is kérünk) *(2 pont)*

2015, mert az unitér mátrix diagonalizálható, így a főátlón kívül nullák vannak, a főátlóban pedig a sajátértékek, de unitér mátrix sajátértékei 1 abszolút értékűek, így egyik sem 0.

3. Legyen az $f : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Legyen $\mathbf{B}$ az f egy másik bázisban felírt mátrixa. Mennyi $\mathrm{trace}(\mathbf{B})$? *(1 pont)*

$\mathrm{trace}(\mathbf{B}) = 0$, mert mátrix nyoma invariáns, azaz független a bázistól, ennek a mátrixnak pedig 0 a nyoma (nyom = főátlóbeli elemek összege)

4. Mutasson példát olyan lineáris leképezésre, melynek van egy olyan invariáns altere, mely nem sajátaltér. Adja meg az invariáns alteret is! *(2 pont)*

Pl. a $\mathbb{R}^3$-ben a z-tengely körüli $\alpha(\neq k\pi)$ szögű forgatásnak az xy-sík invariáns altere, de nem sajátaltere. (Más mo.: minden egynél hosszabb Jordan-lánc vektorai egy invariáns alteret feszítenek ki).

5. Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nemnulla vektor sajátvektora? *(1 pont)*

A $\lambda\mathbf{I}$ mátrixúak, azaz az $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$ leképezések (ugyanis ha minden vektor sajátvektor, akkor az egész tér egy sajátértékhez tartozó sajátaltér).

6. Mennyi az $U = \{(x, y, z, w) : x+y+z+w = 0\}$ altér és az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolsága? *(2 pont)*

$(1, 2, 3, 4) \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) = 5$

7. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását! *(2 pont)*

A Gram–Schmidt-eljárás szerinti bázishoz $\mathbf{v}_2 = (3, 5, 9, -1) - \frac{(3,5,9,-1)(1,-1,1,-1)}{|(1,-1,1,-1)|^2} = (1, 7, 7, 1)$, innen $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ -0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0.7 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}$-ból a felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

8. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ * & * & -5 \end{bmatrix}$, ahol a $*$-gal jelölt elemeket nem ismerjük. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ egyik sajátértéke $\lambda \neq 0$. Határozzuk meg a többi sajátértéket! (ne a karakterisztikus polinom felírásával próbálkozzunk!) *(2 pont)*

Az első két sor összefüggő, tehát a mátrix determinánsa 0, így a 0 biztosan sajátérték. A sajátértékek összege egyenlő a nyommal, e mátrix nyoma 2, így a három sajátérték: 0, λ, $2 - \lambda$.

9. Az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris felbontása

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel azt a mátrixot, melynek 1 a rangja, és Frobenius-normában a legközelebb van $\mathbf{A}$-hoz! *(2 pont)*

Az Eckart–Young-tétel szerint a legközelebbi 1-rangú mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} [9] \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Mondja ki a pozitív mátrixokról szóló Perron-tételt! *(2 pont)*

11. Mondja ki és bizonyítsa be a lineáris leképezés mátrixának létezéséről szóló tételt! *(4 pont)*

12. Mit értünk egy mátrix unitér diagonalizálhatóságán? Igazoljuk, hogy unitéren diagonalizálható mátrix normális. *(4 pont)*