Nemnegatív mátrixok alkalmazásai

Wettl Ferenc

2015. május 14.

A Leontief-modell (statikus)

- egy többszektoros gazdaság szektorok közti termék és jövedelemáramlási adatait elemzi egyszerű statisztikai adatok alapján
- osszuk a gazdaságot n szektorra (pl. ipar, mezőgazdaság, háztartás). Jelölje r_{ij} (ráfordítási együttható) azt, hogy a j-edik szektor egy egységnyi kibocsátásához mennyi szükséges az i szektortól (mátrixa $\mathbf{R}$)
- $\mathbf{R}$ nem szinguláris
- A gazdaság zárt, ha kielégíti saját szükségleteit, és fel is használja minden kibocsátását: k_j az j-edik szektor kibocsátása, tehát $k_i = r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \ldots + r_{in}k_n$, azaz

$$\mathbf{Rk} = \mathbf{k}$$

A Leontief-modell (statikus, zárt)

P Egy távoli szigeten: áramszolgáltatás (A), élelmiszeripar (B) és szolgáltatóipar (C). Mit állapíthatunk meg az ágazatok kibocsátásáról?

	A	B	C
A	0.1	0.6	0.1
B	0.8	0.1	0.4
C	0.1	0.3	0.5

M A kibocsátás meghatározása sajátértékfeladat: $\mathbf{Rk} = \mathbf{k}$. Az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora $(3,4,3)t$ $(t \in \mathbb{R})$.
A sziget gazdaságának teljes kibocsájtásából az áramszolgáltatás 30%, az élelmiszeripar 40%, a szolgáltatóipar 30%.

A Leontief-modell (statikus, nyílt)

- a valóságban minden ágazatnak számolnia kell külső kereslettel vagy követeléssel: értéke az i-edik ágazatra d_i (ezek vektora $\mathbf{d}$), ez a nettó kibocsátás, hisz $d_i = k_i - (r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \dots + r_{in}k_n)$,
  mátrix alakban $\mathbf{d} = \mathbf{k} - \mathbf{R}\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{k}$
- Kérdés: $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ invertálható, és $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} > \mathbf{0}$?
- 1. feltevés: az ágazatok mindegyike, ha más ágazatokon keresztül is, de hat a többire
  bármely i és j ágazatpárra valamely m kitevőre $[\mathbf{R}^m]_{ij} > 0$, azaz $\mathbf{R}$ irreducibilis, sőt, mindig akad ágazat, melyek saját magára is visszahatnak, ezért feltehető, hogy $\mathbf{R}$ primitív.)
- 2. feltevés: van olyan ágazat, mely egy (pénz)egységnyi kibocsátásához egy egységnél kevesebbet használ föl, azaz van $\mathbf{R}$-nek olyan oszlopösszege, mely 1-nél kisebb.
  van olyan nem zésrus $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix, hogy $\mathbf{R} + \mathbf{A}$ (oszlop)sztochasztikus, azaz $\mathbf{1}^\mathsf{T}(\mathbf{R} + \mathbf{A}) = \mathbf{1}^\mathsf{T}$

A Leontief-modell (statikus, nyílt)

Á $\rho(\mathbf{R}) < 1$: ha $\rho(\mathbf{R}) = 1$, $\mathbf{R}$ Perron-vektora $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ (mivel $\mathbf{R} \geqslant \mathbf{O}$ irreducibilis).

$\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ és $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$, így

$$1 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{p} = (\mathbf{1}^\mathsf{T}(\mathbf{R} + \mathbf{A}))\mathbf{p} = 1 + \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{Ap} > 1,$$

ellentmondás.

$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^3 + \ldots > \mathbf{O}$.

- $\forall\mathbf{d}\ \exists\mathbf{k}$: $\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} > \mathbf{0}$.

  E modellben bármely szektort érintő külső kívánság növekedése az összes ágazat kibocsájtását megnöveli.

A Leontief-modell (statikus, nyílt)

P a három szektor ráfordítási együtthatóinak mátrixa

	A	B	C
A	0.1	0.6	0.1
B	0.7	0.1	0.3
C	0.1	0.2	0.5

Mekkora a kibocsátás, ha a külső kereslet vektora $\mathbf{d} = (26, 31, 22)$, és hogyan változik a kibocsátás, ha a B szektorban a külső kereslet 31-ről 36-ra növekszik?

A Leontief-modell (statikus, nyílt)

M Az $\mathbf{R}$ spektrálsugara 0.9 (mivel minden oszlopösszeg 0.9).

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3.9 & 3.2 & 2.7 \\ 3.8 & 4.4 & 3.4 \\ 2.3 & 2.4 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 31 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 310 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

A B szektor növekvő külső kereslete minden szektorban a kibocsátás növekedését eredményezi:

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3.9 & 3.2 & 2.7 \\ 3.8 & 4.4 & 3.4 \\ 2.3 & 2.4 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 36 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 276 \\ 332 \\ 232 \end{bmatrix}.$$

Markov-lánc

- Egy rendszer következő állapota csak a pillanatnyi állapot függvénye, a múlté nem.
- Populációk fejlődése, bizonyos kémiai, termodinamikai, gazdasági folyamatok, tömegkiszolgálási és sorbanállási rendszerekben, statisztika, web-oldalak rangsorolása,...

D Legyen $\mathcal{S}$ egy megszámlálható halmaz (pl. $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$, vagy $\mathcal{S} = \mathbb{N}$). Az $\mathcal{S}$-értékű valószínűségi változók egy X_0, X_1, $X_2, \dots$, $X_n, \dots$ sorozata diszkrét paraméterű homogén Markov-lánc, ha

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = k, \dots, X_0 = \ell) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \text{ és} \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}, \tag{2}$$

Az $\mathcal{S}$ halmazt a Markov-lánc állapotterének nevezzük.

Markov-lánc lineáris algebrai modellje

- $\mathbf{p}_0 = (p_1, p_2, \dots)$ a kezdeti valószínűségeloszlás vektora ($p_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$, $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, $\sum_i p_i = 1$).
- A $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ egy $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$-es mátrix, az átmenetvalószínűségek mátrixa, vagy átmenetmátrix. nevezünk.
- A kezdeti állapotból a j-be való jutás valószínűsége

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_i p_{ij} p_i = [\mathbf{p}_0 \mathbf{P}]_j,$$

- tehát a második állapot eloszlásvektora $\mathbf{p}_0 \mathbf{P}$
- az n-edik állapot valószínűségeloszlása $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$ (általában $\mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = [\mathbf{P}^m]_{ij}$).

T Ha $\mathcal{S}$ egy megszámlálható halmaz, $\mathbf{p}$ egy valószínűségeloszlás $\mathcal{S}$-en, és $\mathbf{P}$ egy $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$ méretű (sor)sztochasztikus mátrix, akkor létezik olyan $\mathcal{S}$ állapotterű Markov-lánc, melynek kezdeti eloszlása $\mathbf{p}$, és átmenetmátrixa $\mathbf{P}$.

Markov-lánc gráfos modellje: bolyongás a gráfon

- Minden Markov-lánc modellezhető egy súlyozott élű irányított gráfon való bolyongással.
- A gráf csúcsai az állapotok, és az i-edik csúcsból akkor vezet egy p_{ij} súlyú él a j-edikbe, ha $\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}$, azaz az i-edik állapotot p_{ij} valószínűséggel követi a j-edik.
- A bolyongót letesszük a gráf egyik csúcsára a kezdeti $\mathbf{p}$ valószínűségeloszlás szerint, az időegységenként körbenéz, és a kifutó élekre írt valószínűségeknek megfelelően véletlenül választ közülük
- Mivel $\mathbf{P}$ sorsztochasztikus, e gráf minden csúcsából kifutó élek súlyainak összege 1.

Két kérdés

- Létezik-e a $\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}_m$ határérték?
- Ha ez nem létezik, létezik-e a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \dots \mathbf{p}_{m-1}}{m}$$

határérték függetlenül $\mathbf{p}_0$ értékétől?

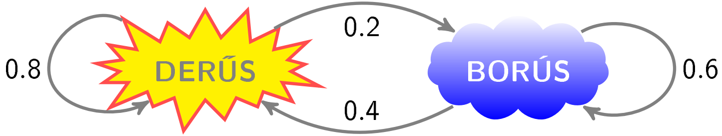
Időjárás

P Derűs napot 80% eséllyel derűs, míg borúst 60% eséllyel borús nap követ.

M Az átmenetmátrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

A folyamat gráfja:



Csön-csön gyűrű

P Páros sok gyerek körben ül, egyikük kezében rejtve egy gyűrű. Ritmusra mindenki úgy tesz, mintha egyik szomszédja kezébe adná a gyűrűt. Tfh minden játékos fix valószínűséggel, véletlenül választva adja át a gyűrűt.

A Markov-lánc állapota az, hogy kinél van a gyűrű.

M A Markov-lánc átmenetmátrixában legyen $a_{i,i-1} = p_i$, $a_{i,i+1} = 1 - p_i$, ahol $p_i \in [0, 1]$, és $i = 1, 2, \ldots, n$, azaz

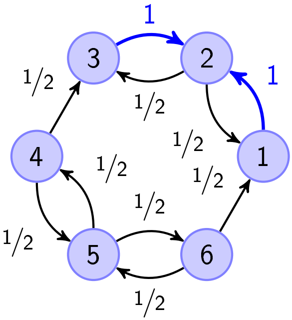
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1-p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_1 \\ p_2 & 0 & 1-p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1-p_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1-p_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_n & 0 \end{bmatrix}$$

Csön-csön gyűrű

M Mivel a résztvevők száma páros, ezért minden lépésben változik a Markov-lánc állapotának paritása, így a $\mathbf{p}_m$ vektorok határértéke nem létezik.

P egy 6-fős játék mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



ha a gyűrű az $\{1, 2, 3\}$ halmazba kerül, onnan többé nem jut ki, ha egyszer elhagyja a $\{4, 5, 6\}$ halmazt, oda többé nem tér vissza.

Ki nevet a végén?

P A táblán a Starttól a Célig öt további mező van. A játékos dob, majd annyit lép a Cél felé, amennyi a dobás eredménye, de ha nagyobbat dob, mint amennyi a célba éréshez szükséges, vissza kell fordulnia. Akkor ér a Célba, ha épp ott fejezi be a lépéseket.

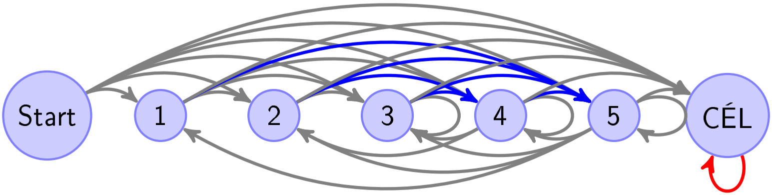
Start	1	2	3	4	5	CÉL

M A játékhoz tartozó átmenetmátrix

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

A kezdeti eloszlás $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, és a Start-ba sosem jutunk vissza.

Ki nevet a végén?



A szürke élekhez $1/6$, a kékekhez $2/6$, míg a piroshoz 1 valószínűség tartozik.

Azt sejtjük, hogy a játékos 1 valószínűséggel véges időn belül CÉL-ba ér, ezért az állapotvektorok határértéke $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

1 Leontief ágazati modellje

2 Markov-láncok
- Néhány példa
- Osztályozás

3 Keresésé a web-en
- PageRank
- A HITS algoritmus

Az állapotok osztályozása

D Az i állapotból a j elérhető (jelölése $i \to j$), ha van olyan $n \geqslant 0$ egész, hogy $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$.
algebra: van olyan n, hogy $[\mathbf{P}^n]_{ij} > 0$
gráf: van irányított út az i csúcsból a j-be

D i és j állapotok érintkeznek, vagy közlekednek ($i \leftrightarrow j$), ha $i \to j$ és $j \to i$

Á E reláció osztályozza az állapotokat (ekvivalencia-reláció).

P A „Ki nevet a végén?” játékban három osztály van (Start, Cél, többi), a „Csön-csön gyűrű”-ben két osztály van, az $\{1, 2, 3\}$ és a $\{4, 5, 6\}$.

D Egy Markov-lánc irreducibilis, ha egyetlen osztályból áll.
A lánc gráfja erősen összefüggő.
A Markov-lánc irreducibilis, ha átmenetmátrixa irreducibilis, azaz minden (i, j) párhoz van olyan m, hogy $[\mathbf{P}^m]_{ij} > 0$.

P Az Időjárásmodell irreducibilis, a „Csön-csön gyűrű” és a „Ki nevet a végén?” reducibilis.

Az állapotok osztályozása

D Az i állapot d_i periódusa azon kísérletek sorszámának legnagyobb közös osztója, amelyekben a Markov-lánc az i állapotból indulva visszatérhet i-be, azaz $d_i = \operatorname{lnko}\{\, n > 0 : \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) > 0 \,\}$.

P Például a „Csön-csön gyűrű" játék mindegyik állapotának 2 a periódusa.

D Az állapot aperiodikus, ha $d_i = 1$. A Markov-lánc aperiodikus, ha minden állapota aperiodikus.

P Az „Időjárásmodell" és a „Ki nevet a végén?" aperiodikus.

D Az i állapot visszatérő, ha a Markov-lánc az i-ből indulva 1 valószínűséggel visszatér az i-be, azaz $\exists n > 0 : \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) = 1$.

D Egy állapot átmeneti, ha nem visszatérő.

P A „Csön-csön gyűrű" $\{\,1, 2, 3\,\}$-beli állapotai visszatérők, a $\{\,4, 5, 6\,\}$-beliek átmenetiek.

Az állapotok osztályozása

M Általában is igaz, hogy a visszatérés, az átmenetiség és a periódus ún. osztálytulajdonság, azaz egy osztály minden elemére azonos.

Á Egy véges állapotterű Markov-láncban egy osztály pontosan akkor átmeneti, ha gráfján vezet ki belőle él, és pontosan akkor visszatérő, ha nem. Ha a Markov-lánc elhagy egy átmeneti osztályt, akkor oda többé nem jut vissza, ha belép egy visszatérő osztályba, akkor onnan többé nem tud kijönni. Minden Markov-lánc állapottere diszjunkt átmeneti és visszatérő osztályok uniója.

P A „Csön-csön gyűrű" (csupa pozitív valószínűség esetén) és az Időjárámodell állapotai egyetlen visszatérő osztályt alkotnak,

P A „Csön-csön gyűrű" 6-fős változata egy visszatérő és egy átmeneti osztályból áll,

P A „Ki nevet a végén?" játék két átmeneti és egy visszatérő osztály uniója.

Irreducibilis Markov-láncok

M A továbbiakban kizárólag csak véges állapotterű Markov-láncokkal foglalkozunk.

D A $\mathbf{P}$ átmenetmátrixú véges Markov-lánc állapotterén értelmezett valamely $\boldsymbol{\pi}$ eloszlásvektort stacionárius, ha $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$.

M Primitív mátrixok hatványainak határértéke megegyezik a jobb és bal Perron-vektor diadikus és skaláris szorzatának hányadosával. Mivel egy $n \times n$-es átmenetmátrix jobb Perron-vektora $\frac{1}{n}\mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ a csupa-1 vektor, ezért ha $\boldsymbol{\pi}$ jelöli a bal Perron-vektort, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^m = \frac{(\mathbf{1}/n)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}}{(\mathbf{1}/n)\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}} = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi},$$

ugyanis $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}} = 1$.

K Ebből azonnal adódik, hogy $\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}_m = \boldsymbol{\pi}$, ugyanis tetszőleges $\mathbf{p}_0$ eloszlásvektorra $\mathbf{p}_0\mathbf{1}^{\mathsf{T}} = 1$, így

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}_m = \lim_{m\to\infty} \mathbf{p}_0\mathbf{P}^m = \mathbf{p}_0\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.$$

Irreducibilis Markov-láncok

- Az Időjárásmodell esetén a $\mathbf{P} = \left[\begin{smallmatrix} .8 & .2 \\ .4 & .6 \end{smallmatrix}\right]$ átmenetmátrix primitív, az 1 sajátértékhez tartozó bal sajátvektora, s vele a stacionárius eloszlás $\boldsymbol{\pi} = (2/3, 1/3)$, vagyis a napoknak 2/3-a derűs. Másrészt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^m = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- A „Ki nevet a végén?” átmenetmátrixának bal sajátvektora fejben számolással is ellenőrizhető, hogy $\boldsymbol{\pi} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) = \mathbf{e}_7$, így az állapotvektorok határértéke $\mathbf{e}_7$, vagyis valóban a CÉL-ban végzünk (1 valószínűséggel).

Irreducibilis és imprimitív Markov-láncok

- Ha $\mathbf{P}$ irreducibilis, de imprimitív, mint például a „Csön-csön gyűrű”-nél, akkor létezik ugyan stacionárius megoldás, de az nem az állapotvektorok határértéke,
- de a stacionárius vektor i-edik koordinátája – itt is, mint a primitív esetben – megadja, hogy a Markov-lánc „idejének” átlagosan hányad részét tölti az i-edik állapotban.
- Az állapotvektoroknak nincs határértékük, de átlaguknak igen, a stacionárius vektor, ugyanis

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{I}+\mathbf{P}+\mathbf{P}^2+\cdots+\mathbf{P}^{m-1}}{m} = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi},$$

amiből

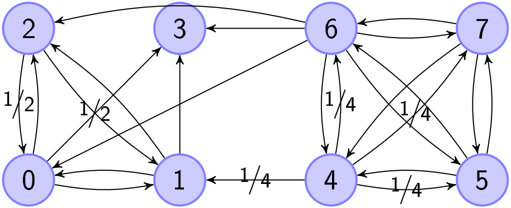
$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{p}_0+\mathbf{p}_1+\cdots+\mathbf{p}_{m-1}}{m} = \boldsymbol{\pi}.$$

- A 6 fős „Csön-csön gyűrű” esetében $\boldsymbol{\pi} = (1/4, 1/2, 1/4, 0, 0, 0)$. (Az átmeneti osztályban töltött idő elenyészik a visszatérő osztályhoz képest).

Google PageRank

- Larry Page és Sergey Brin: : egy dokumentum PageRank értéke annál magasabb, minél több nagy PageRank érékű dokumentum mutat rá.
- Modell: weben szörfölő, az oldalak linkjei közül véletlenszerűen választ. Ha e bolyongást sokáig folytatja, kialakul egy sorrend, melyben minden dokumentum azzal arányos számú pontot kap, ahányszor ott járt a szörfölő.
- Súlyozott élű gráf: a dokumentumok a gráf csúcsai, az i-edik csúcsból él megy a j-edik csúcsba, ha az i-edik dokumentumban van link a j-edikre. A súlya $1/k$, ha k a ki-foka.

PageRank: egy 8-dokumentumos példa



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Javítás

- E mátrix majdnem (sor)sztohasztikus

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha megy i-ből j-be él és i ki-foka k,} \\ \frac{1}{n}, & \text{ha i ki-foka 0 és n a csúcsok száma,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- ha vannak olyan dokumentumok, amelyek csak egymásra hivatkoznak, a szörfölő beragadhat: a mátrix reducibilis, gráfja nem erősen összefüggő (Pl.: $\{0, 1, 2, 3\}$).
- a szörfölő minden csúcsban d valószínűséggel egyenletes eloszlás szerint választ az összes csúcs közül, és $1 - d$ valószínűséggel a csúcsból kifutó élek végpontjai közül egyenletes eloszlás szerint:

$$\mathbf{M} = (1 - d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J},$$

ahol $\mathbf{J}$ a csupa 1-esből álló mátrix, n e négyzetes mátrixok rendje, $d \in (0, 1)$ (ált: $d \in (0.1, 0.2)$, pl. legyen $d = 0.15$)

Markov-lánc, Perron-tétel

- $\mathbf{M}$ pozitív, sztochasztikus ($\mathbf{A}$ és $\frac{1}{n}\mathbf{J}$ is)
- tehát $\mathbf{M}$ tehát egy Markov-lánc átmenetmátrixa
- Perron-tétel: spektrálsugara 1, az 1 egyszeres sajátérték, nincs több 1-abszolút értékű sajátértéke, és az 1-hez tartozik az egyetlen olyan pozitív $\mathbf{v}$ bal sajátvektor, melyre $\|\mathbf{v}\|_1 = 1$
- $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{M}^m = \mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ a stacionárius eloszlás.
- hatalmas mátrixok esetén $\mathbf{A}$ még ritka, de $\mathbf{M}$ már nem:

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{M} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\left((1-d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J})\right) = (1-d)\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \frac{d}{n}\mathbf{1}^\mathsf{T},$$

- elég csak az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ vektor-mátrix szorzást elvégezni és néhányszor iterálni.

Példa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.444 & 0.444 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.019 & 0.231 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.231 & 0.231 & 0.231 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 \\ 0.160 & 0.019 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.019 & 0.160 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 \end{pmatrix}$$

A stacionárius eloszlás:

$$\mathbf{v} = (0.151, 0.157, 0.137, 0.137, 0.106, 0.100, 0.112, 0.100).$$

A sorrend: 1, 0, 2 & 3, 6, 4, 5 & 7

HITS (Hyperlink-Induced Topic Search)

- Jon Kleinberg: HITS
- A PageRank önmeghatározását itt egy kettős önmeghatározás váltja: a web-en fontos oldalak közt vannak tekintélyek (authorities), és gyűjtőoldalak (hubs), melyek egy téma fontos és releváns oldalaira mutatnak. Egy tekintély mértéke annál nagyobb, minél több nagy értékű gyűjtő mutat rá, míg egy gyűjtő értéke annál nagyobb, minél több nagy értékű tekintélyre mutat.
- Minden linket figyelembe veszünk, az adjacenciamátrixszal számolunk:

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha megy } i\text{-ből } j\text{-be él,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

HITS

- A tekintélyértékek vektora $\mathbf{a}$, a gyűjtőértékek vektora $\mathbf{h}$. Szeretnénk, hogy minden oldal tekintélyértéke megegyezzen a rá mutató oldalak gyűjtőértékének összegével, és minden oldal gyűjtőértéke megegyezzen a benne lévő linkekhez tartozó oldalak tekintélyértékének összegével:

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^T\mathbf{h}$$

- ??? $\mathbf{a} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{a}$ ($\mathbf{A}^T\mathbf{A}$-nak az 1 általában nem sajátértéke). Iteráció:

$$\mathbf{h}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{a}_m$$

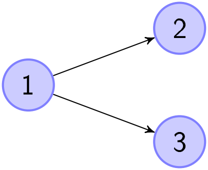
$$\mathbf{a}_{m+1} = \mathbf{A}^T\mathbf{h}_{m+1}$$

amiből behelyettesítéssel adódik, hogy

$$\mathbf{h}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{h}_m$$

$$\mathbf{a}_{m+1} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{a}_m$$

HITS



- A gráf adjacenciamátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$., a tekintélyértékek induló vektora $\mathbf{a}_0 = (1, 1, 1)$:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{A}\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

HITS

Innen

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

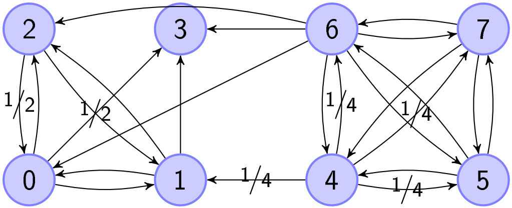
majd $\mathbf{h}_2 = (4, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 4, 4)$, stb.

- Mindig lenormálva: $\mathbf{h} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (0, 1/2, 1/2)$ (az 1-es dokumentum 1-értékű gyűjtő és 0-értékű tekintély, míg a másik két dokumentum 0-értékű gyűjtő, és azonos értékű tekintélyek).
- Általában

$$\mathbf{h} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{h}_m}{\|\mathbf{h}_m\|_1}, \text{ és } \mathbf{a} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{a}_m}{\|\mathbf{a}_m\|_1}$$

vektorok az $\mathbf{A}$ mátrix jobb, illetve bal Perron-vektorai.

HITS



A két Perron-vektor:

$$\mathbf{h} = (0.1176, 0.1276, 0.0696, 0, 0.1608, 0.1283, 0.2678, 0.1283)$$
$$\mathbf{a} = (0.1194, 0.0894, 0.1317, 0.1317, 0.1346, 0.1430, 0.1072, 0.1430).$$

6-os a legjobb gyűjtő, 3-as a legrosszabb, a tekintélyek közt kicsi a különbség, hisz mindegyikre három oldal mutat: holtversenyben első az 5-ös és 7-es, és az 1-es a legrosszabb (rá gyengébb gyűjtők hivatkoznak).