Vektorterek

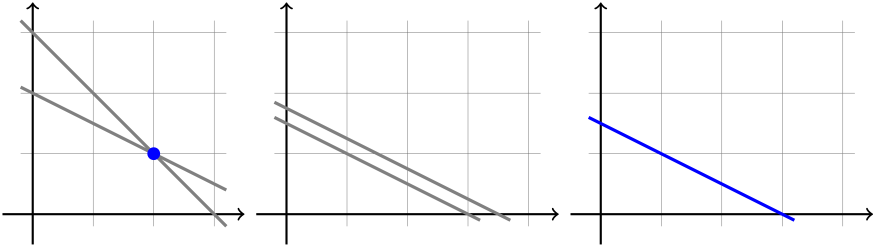
Wettl Ferenc

2015. február 17.

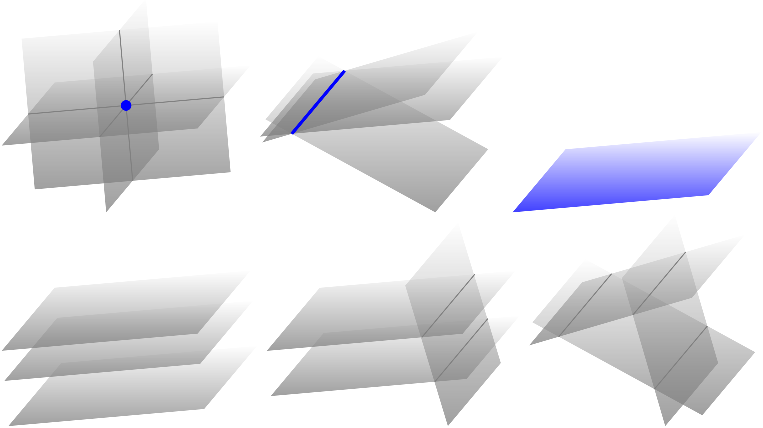
1. Egyenletrendszerek
2. Algebrai struktúrák
3. Vektortér
4. Bázis, dimenzió
5. Valós mátrixok és egyenletrendszerek

Sormodell

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \text{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



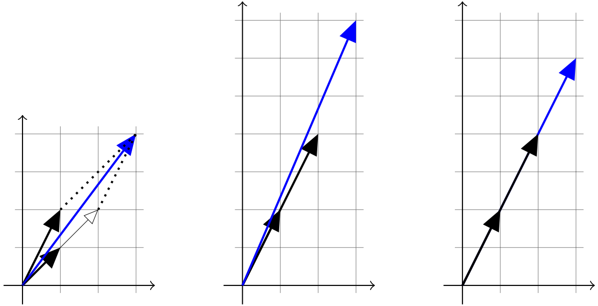
Sormodell 3D-ben



Oszlopmodell

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$



Test

- Számolunk, mint a valós számokkal!

D Egy legalább kételemű $\mathbb{F}$ halmazt testnek (algebrai testnek) nevezünk, ha

1. értelmezve van $\mathbb{F}$ elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű bináris művelet,
2. az összeadás kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje (additív inverze),
3. a szorzás kommutatív, asszociatív, létezik egységelem és a nullelemen kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze (reciproka),
4. az összeadás a szorzásra nézve disztributív.

Á a nullelem és az egységelem szükségképpen különböző.

Á $0a = a0 = 0$.

P $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ (prím modulusú maradékosztályok, más jelölések: $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{GF}(p)$).

Gyűrű

- Számolunk, mint az egészekkel.

D Ha a testnél definiált szorzás csak asszociatív, gyűrűről,

D ha kommutatív is, kommutatív gyűrűről,

D ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, egységelemes gyűrűről beszélünk.

P Minden test gyűrű.

P Z egységelemes kommutatív gyűrű, $\mathbb{N}$ nem gyűrű.

P A páros számok kommutatív gyűrűt alkotnak, de ez nem egységelemes.

P A $\mathbb{Z}_m$ egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha m prím.

P A valós együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

Vektortér

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}$ halmaz az $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér, ha értelmezve van rajta két művelet ((vektor)összeadás, skalárral szorzás), melyekre

1. $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (kommutatív).
2. $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}: \ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (asszociatív).
3. $\exists\ \mathbf{0} \in \mathcal{V}$, hogy $\forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (zéruselem).
4. $\forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{V}\ \exists\ \mathbf{y} \in \mathcal{V}: \ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (additív inverz).
5. $\forall\ c, d \in \mathbb{F}, \ \forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{V}: \ (cd)\mathbf{x} = c(d\mathbf{x})$ (szorzások kompatibilitása).
6. $\forall\ \mathbf{x}\mathcal{V}: \ 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (egységelemmel szorzás).
7. $\forall\ c, d \in \mathbb{F}, \ \mathbf{x} \in \mathcal{V}: \ (c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ (disztributivitás).
8. $\forall\ c \in \mathbb{F}, \ \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}: \ x(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ (disztributivitás).

Vektortér alaptulajdonságai

- Á Minden vektortérnek egyetlen zérusvektora van.
- Á Minden $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vekornak egyetlen additív inverze van: $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$.
- Á Ha $c \in \mathbb{F}$ és $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, akkor $c\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff c = 0$ vagy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- P Az $\mathbb{F}^n$ a szokásos összeadással és skaláris szorzással $\mathbb{F}$ fölötti vektortér.
- P Az $\mathbb{F}$-beli végtelen $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ sorozatok halmaza vektortér.
- P Valós vektortér: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, komplex vektortér: $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
- P Az $\mathbb{F}$ test fölötti ($\mathbb{F}$-beli együtthatós) egyváltozós polinomok $\mathbb{F}[x]$ halmaza vektortér.
- P Az n-nél kisebb fokú polinomok $\mathbb{F}[x]_n$ halmaza vektortér.
- P Ha X egy tetszőleges halmaz, és $\mathbb{F}$ egy test, akkor az összes $X \to \mathbb{F}$ függvények $\mathbb{F}^X$-szel jelölt halmaza $\mathbb{F}$ fölötti vektortér.
- P Ha X egy $\mathbb{R}$-beli nem üres halmaz, akkor az X-en értelmezett folytonos függvények $\mathcal{C}(X)$, illetve az X-en differenciálható függvények $\mathcal{D}(X)$ halmaza vektortér.

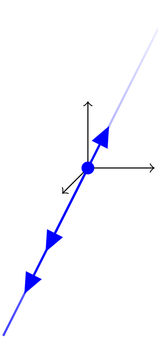
Altér

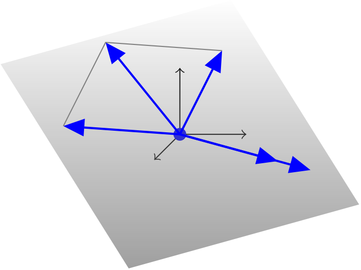
D az $\mathbb{F}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortérnek $\mathcal{W}$ altere, ha $\emptyset \neq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ zárt a két műveletre. Jel: $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.

K $\mathbf{0} \in \mathcal{W}$,

P origón átmenő egyenes a síkban (térben)

P origón átmenő sík a térben

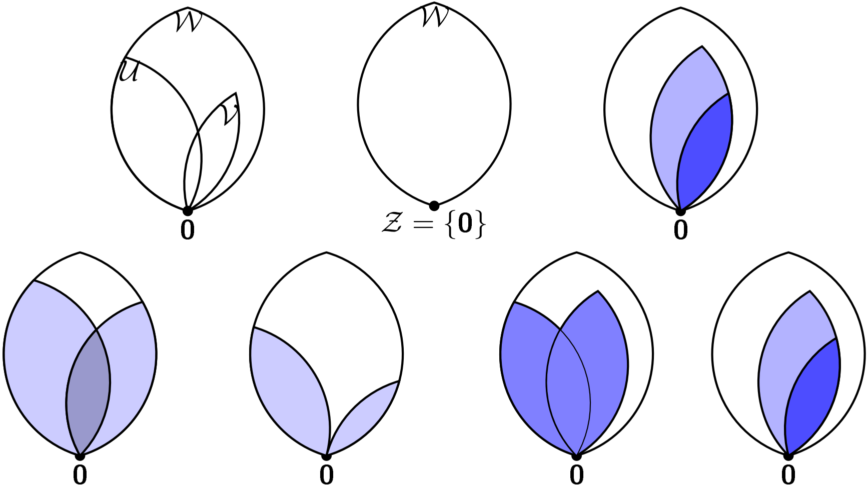




Altér

- P szimmetrikus mátrixok $\mathbb{F}^{n\times n}$-ben
- P felsőháromszög-mátrixok $\mathbb{F}^{n\times n}$-ben
- P diagonális mátrixok $\mathbb{F}^{n\times n}$-ben
- P legföljebb másodfokú polinomok a polinomok (vagy pl. a legföljebb negyedfokúak) terében
- P $\mathbb{R}$-en differenciálható valós függvények az $\mathbb{R}$-en folytonos valósok terében
- Á minden vektortérnek altere saját maga és a zérustér ($\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$)
- Á alterek metszete altér
- Á alterek uniója pontosan akkor altér, ha az egyik altere a másiknak
- M Az $\mathbb{R}$ ugyan részteste $\mathbb{C}$-nek, de $\mathbb{R}^n$ nem altere a $\mathbb{C}^n$ vektortérnek.

Levéldiagram



Mátrixhoz tartozó alterek

- P $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixra $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{F}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{F}^m$ (sor-, oszloptér)
- P homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai ($\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ay} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{0}$)
- K azon $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megoldható, alteret alkotnak (ez megegyezik $\mathbf{A}$ oszlopterével)
- K $\mathbb{F}^{m\times n}$-es mátrix nulltere $\mathbb{F}^n$ altere ($\mathcal{N}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{F}^n$)
- T Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok megőrzik az eredeti lineáris kapcsolataikat.
- K Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor
  1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
  2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
  3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
  4. a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

Kifeszített altér

D a $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ $(i = 1, \dots, k)$ vektorok által kifeszített altér:

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k : c_1, c_2 \dots, c_k \in \mathbb{F} \,\}.$$

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) \leqslant \mathbb{F}^n$ (tehát altér)

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ a minimális altér azok között, melyek tartalmazzák a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorokat.

P Minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok lineáris kombinációja, amelyben az i-edik sor j-edik elem 1, a többi 0.

P Minden legföljebb n-edfokú polinom az 1, x, x^2,…,x^n lineáris kombinációja.

P a $\mathbf{T} = [t_{i-j}]_{i,j=0}^{n-1}$ Toeplitz mátrix a $2n-1$ darab $\mathbf{T}_k = [\delta_{i-j,k}]_{i,j=0}^{n-1}$ mátrixok lineáris kombinációja, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Affin altér

J $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{W} + \mathbf{u} = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} : \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}$

D a $\mathcal{W} + \mathbf{u}$ affin altér

M ez nem altér, ha $\mathbf{u} \notin \mathcal{W}$.

Á Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként ($\mathbf{b}$ benne van $\mathbf{A}$ oszlopterében). A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ összes megoldása = az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ valamelyik megoldása + az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ összes megoldása

K Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ összes megoldása egy affin alteret alkot, ami nem altér, ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Bázis

D A $\mathcal{V}$ vektortér bázisán olyan vektorrendszert értünk, mely
1. lineárisan független,
2. generátorrendszer (mely kifeszíti $\mathcal{V}$-t).

P Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt $\mathbb{F}^n$ standard bázisának nevezzük.

Á A zérustérnek nincs bázisa

P Az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok bázist alkotnak $\mathbb{F}^{m \times n}$-ben

P A legföljebb n-edfokú polinomok terének $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ egy bázisa.

Bázis meghatározása – első megoldás

Példa (Altér bázisának meghatározása)

Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

Megoldás

Sorvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Bázis meghatározása – második megoldás

Megoldás

oszlopvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk.

Felírás bázisvektorok lineáris kombinációjaként

Megoldás

a redukált lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alak e bázisban

Példa (Vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B}$ bázisban)

Jelölje $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$ a bázist. A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kapjuk a négy vektor koordinátás alakjait:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Bázis és dimenzió

Állítás (Bázis ekvivalens definíciói)

Legyen $\mathcal{U}$ vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{U}$ alteret,
- $\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{U}$-t;
- $\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{U}$-ban.

Tétel (Bázis-tétel)

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van n-elemű bázisa, akkor minden bázisa n-elemű.

Definíció (Dimenzió)

A $\mathcal{V}$ vektortér n-dimenziós, ha van n-elemű bázisa. (véges dimenziós vektortér)

Mátrix, rang, dimenzió

Állítás (Dimenzió = rang)

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. (Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$.)

Tétel (Dimenziótétel)

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

Valós mátrixok sor- és nulltere

Definíció (Merőleges altér és merőleges kiegészítő altér)

egy vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik altérből, és egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek egymásra. Egy $\mathcal{W}$ altérre merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ merőleges kiegészítő alterének nevezzük és $\mathcal{W}^{\perp}$-pel jelöljük („W perp”).

Tétel (A lineáris algebra alaptétele)

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

- K $\mathcal{S}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.
- K $\mathcal{O}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.
- K Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

Valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldásai)

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

- egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
- a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
- az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.

A sortérbe eső megoldás megkeresése

Példa (Lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása)

Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2w &= 4 \\ x + 2y + z + 5u + 2w &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3w &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4w &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű megoldását!

A redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Így a megoldás:

$$(x, y, z, u, w) = (1, 1, 2, 0, 0) + (-1, -2, 0, 1, 0)u + (-1, 0, -1, 0, 1)w.$$

A redukált lépcsős alak szerinti egyenletrendszerhez ezt kell adni:

$$\begin{aligned} -x - 2y \quad &+ u \quad &= 0 \\ -x \quad - z \quad &+ w &= 0 \end{aligned}$$

Így a kiegészített egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15/17 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett megoldás ${}^1\!/_{17}(-4, 5, 19, 6, 15)$.