Lineáris leképezések

Wettl Ferenc

2015. március 9.

A mátrixleképezés fogalma

D $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$

D képtér: $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, magtér: $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$

P $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

M Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & - a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 & \qquad - a_1x_3 \\ - a_2x_1 + a_1x_2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Műveletek mátrixleképezések között

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff A + B = C$
- $c\mathbf{A} = \mathbf{C} \iff cA = C$
- $\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \iff X \circ Y = Z$
- $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \iff B = A^{-1}$

Mátrixleképezések tulajdonságai

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$:

- $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, ($A$ megőrzi a lineáris kombinációt)
- $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$, (a leképezés homogén)
  $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$, (a leképezés additív)
- $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Tetszőleges altér képe altér.
- Tetszőleges affin altér képe affin altér.

Lineáris leképezés

D Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés lineáris, ha homogén és additív,

lineáris transzformáció, ha $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

P deriválás: $D : \mathcal{V} \to \mathcal{W} : f \mapsto D(f) = f'$

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és}$$
$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

P integrálás:

$$\int_0^1 cf = c\int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$

P Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés.

Vektortérből vektortérbe képző lineáris leképezések

Tétel

Ekvivalens állítások:

- $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris (homogén és additív).
- Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, $c, d \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
- Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{F}$
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \dots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Lineáris $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezések

Tétel

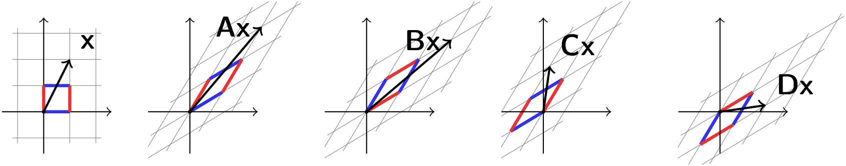
$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris, ha létezik egy olyan $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor az $\mathbf{e}_i$ standard egységvektorokkal

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_2|\dots|A\mathbf{e}_n],$$

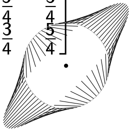
Bizonyítás

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + \dots + x_n A\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

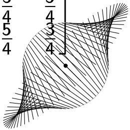
A mátrixleképezés hatásának szemléltetései



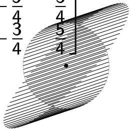
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$



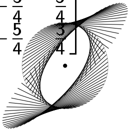
$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

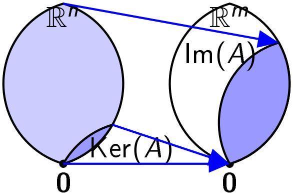


$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$



$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$





Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

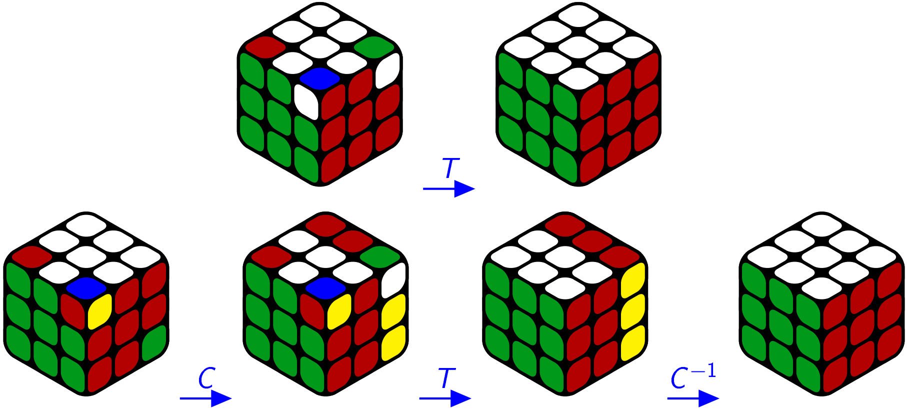
$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$$

Hasonlóság



Definíció

Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Hasonlóság

Tétel (Hasonló mátrixok hatása)

Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

Bizonyítás

$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$.

Tétel (Hasonlóságra invariáns tulajdonságok)

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, azaz $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,
3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
4. $\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = \mathrm{trace}(\mathbf{B})$.

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága

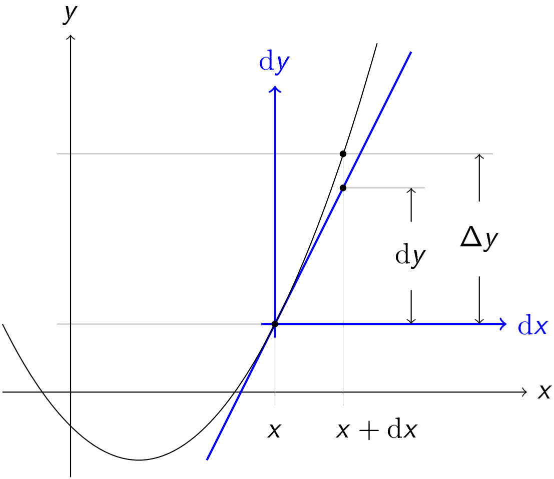
M $D = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-Dh}{h} = 0 \iff$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-Dh}{|h|} = 0.$

D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, ha létezik olyan $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, melyre

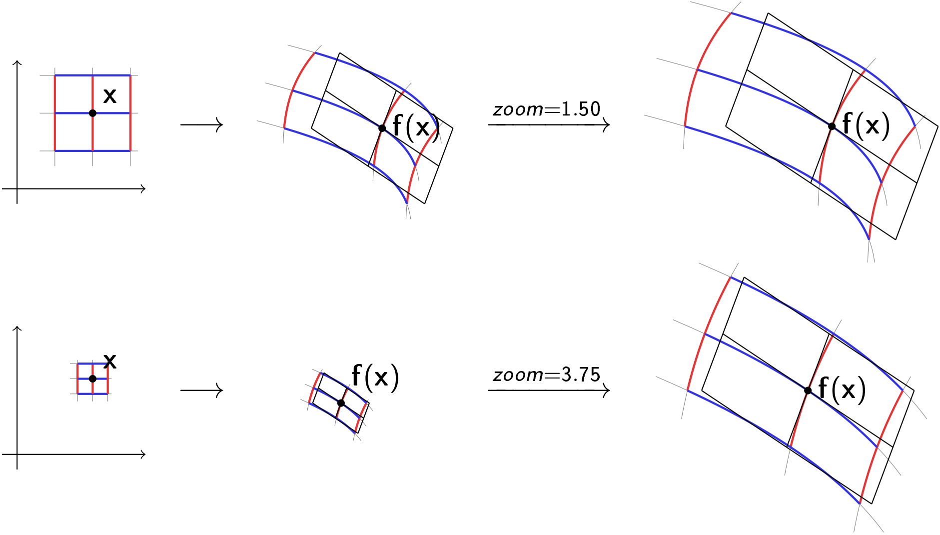
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}.$$

A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ leképezést az $\mathbf{f}$ függvény $\mathbf{x}$ ponthoz tartozó deriváltleképezésének nevezzük.

Derivált



Derivált



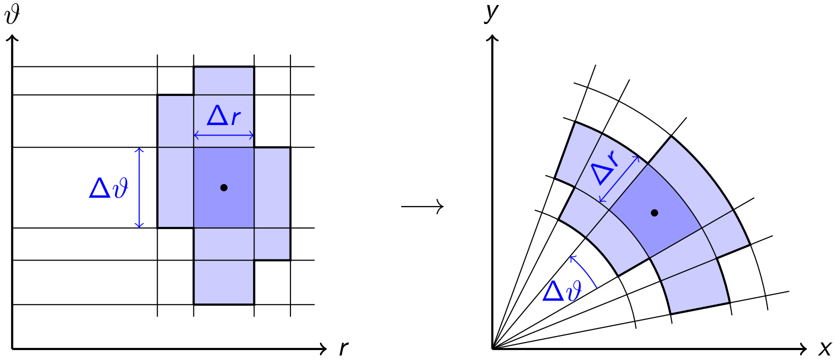
Jacobi-mátrix

Tétel (Jacobi-mátrix)

Ha az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \dots, f_m)$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, akkor a lineáris $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés mátrixa a következő, ún. Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Jacobi-determináns és az integrál transzformációja



Függvények kompozíciójának deriváltja

Tétel (Láncszabály)

Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ két függvény. Ha $\mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ helyen, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa:

$$D_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = D_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g},\mathbf{x}}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})}\mathbf{D}_{\mathbf{g},\mathbf{x}}.$$

Forgatás

Á Forgatás 2D-ben: $\begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Á Forgatás tengely körül 3D-ben:
$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

T Rodrigues-formula: az $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egységvektor egyenese körül α szöggel:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)[\mathbf{e}]_\times^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

T Kvaterniókkal: $\mathbf{q} = \cos\frac{\alpha}{2} + (e_1 i + e_2 j + e_3 k)\sin\frac{\alpha}{2}$ a forgatást jellemző kvaternió, a (v_1, v_2, v_3)-hoz tartozó kvaternió $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$. Az elforgatott: $\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$, ahol $\mathbf{q}^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2} - (e_1 i + e_2 j + e_3 k)\sin\frac{\alpha}{2}$

M számolás kvaterniókkal: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, \ldots$ szorzás: $(a + \mathbf{u})(b + \mathbf{v}) = ab - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Merőleges vetítés és tükrözés

- Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}$ $(\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})$.
- Síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$.
- Síkbeli tükrözés mátrixa az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$.
- Síkra való tükrözés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$.

Vetítés

Á $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$

Eltolás

Á 2D: $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ a $z = 1$ egyenletű síkban:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

mátrixa

$$\mathbf{T} = T \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Á 3D: $(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$ eltolás:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alterek direkt összege

D $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ két tetszőleges altér. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ kiegészítő altere, vagy komplementer altér, ha

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U},$$

és azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek direkt összege, amit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.

T Ekvivalens állítások:

- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek,
- $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen áll elő egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként,
- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = n$.

P ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathbb{R}^m$.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

Tétel

Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják ($\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\text{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

Bizonyítás

Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\mathcal{W}$-re eső merőleges vetülete $\mathbf{w}$. $\mathbf{A}$ oszloptere $\mathcal{W}$, ezért létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$. $\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, így $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, tehát $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében. Eszerint $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$, innen

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix teljes oszloprangú, így $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, amiből $\text{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa?

T Egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}^2$.

$\Rightarrow$ $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}.$$

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}^2$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re való merőleges vetítés mátrixa. Ehhez elég megmutatnunk, hogy az $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ vektor merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén. A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^{\mathsf{T}})$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re, és ezt akartuk belátni.

Altértől való távolság

D $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altér. $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W}$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük.

T Legjobb közelítés tétele: Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$.

B $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) + (\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$.

első kifejezés $\mathcal{W}^{\perp}$, a második $\mathcal{W}$ eleme!

$(\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) \perp (\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$

Pithagorász: $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2 + |\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2$.

$\rightsquigarrow |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2$

egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$

K $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$.

Altértől való távolság

P Bontsuk fel az $\mathbf{x} = (8, 4, 2, 1)$ vektort $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.

M A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = (8, 1, -1, 0)$ és $\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = (0, 3, 3, 1)$.

Egyenletrendszer optimális megoldása

D Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldásain az $\mathbf{Ax} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ megoldásait értjük.

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival (normálegyenlet-rendszer). Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

Lineáris és polinomiális regresszió

T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

B Megoldandó:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

Vetítés

D $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, így bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. A $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való (vele párhuzamosan vett) vetülete.

D Ez lineáris transzformáció, vetítésnek vagy projekciónak nevezzük.

M minden P vetítés az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés.

Á Mátrixa: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$.
Legyen

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \dots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \dots, n-r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{PU} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{PV}|\mathbf{PW}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

$\mathbf{U}$ invertálható, ezért

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

Vetítés

T A projekció tulajdonságai: Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy projekció.

1. $\mathbb{R}^n$-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa $\mathbf{P} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.
2. $I - P$ is projekció: $\operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$,
3. $\operatorname{r}(P) = \operatorname{trace}(\mathbf{P})$.