Merőlegesség

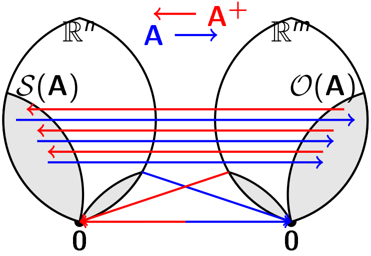
Wettl Ferenc

2015-03-13

1. Pszeudoinverz
2. Ortonormált bázis – ortogonális mátrix
3. Komplex és véges test feletti terek
4. Diszkrét Fourier-transzformált
   - Fourier-mátrixok
   - Diszkrét Fourier-transzformáció
   - Gyors Fourier-transzformáció

A pszeudoinverz fogalma

Á A sortér és az oszloptér közt létezik természetes kölcsönösen egyértelmű megveleltetés ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyetlen sortérbe eső megoldása).



D $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pszeudoinverzén vagy Moore–Penrose-féle pszeudoinverzén azt az $\mathbf{A}^+$-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

- a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^+(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$, továbbá
- az oszloptérre merőleges minden $\mathbf{z}$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Néhány pszeudoinverz

Á $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, ha $\mathbf{A}$ invertálható,

Á $\mathbf{O}^+_{m\times n} = \mathbf{O}_{n\times m}$,

Á $[a]^+ = [{}^1\!/\!_a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,

Á $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,

Á ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

A pszeudoinverz kiszámítása

T Ha a valós $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ha teljes sorrangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$.
Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, ahol $\mathbf{B}$ egy teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ egy teljes sorrangú mátrix (ld. bázisfelbontás). Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}.$$

B Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, és $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható:

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, vagyis $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$: $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Ha $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$: $\forall\mathbf{y}$-ra $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzisztens. Jelölje $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldást, így minden más $\mathbf{x}$ megoldásra $\operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. $\mathbf{A}^+$-ra fenn kell álljon $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

A pszeudoinverz tulajdonságai

T Moore–Penrose-tétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{X}$ pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c)\ (\mathbf{AX})^{\mathsf{T}} = \mathbf{AX}, \quad d)\ (\mathbf{XA})^{\mathsf{T}} = \mathbf{XA}.$$

K Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathrm{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \quad \text{és} \quad \mathbf{AA}^{+} = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}.$$

Tehát $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ sorterére, míg $\mathbf{AA}^{+}$ az $\mathbb{R}^m$ teret merőleges vetíti $\mathbf{A}$ oszlopterére.

A pszeudoinverz és a min. absz. értékű opt. megoldás

T Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$ a minimális abszolút értékű optimális megoldása.

P Határozzuk meg a minimális abszolút értékű optimális megoldását!

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

M Az egyenletrendszer nem oldható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ezt felhasználva a minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ortogonális és ortonormált bázis

D OR (ortogonális rendszer, lehet köztük zérusvektor), ONR (ortonormált rendszer

T Ha a nullvektortól különböző $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor függetlenek is.

B Tekintsük a $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ egyenletet.

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát $\mathbf{a}_i$-vel $(i = 1, 2, \dots, k)$:

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_i \\ c_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i &= 0.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \neq 0$, ezért $c_i = 0$, és ez igaz minden i-re.

Ortogonális és ortonormált bázis

T Legjobb közelítés ONB esetén Adva van a $\mathcal{V}$ vektortérben egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormált rendszer által kifeszített $\mathcal{A}$ altér, valamint egy $\mathbf{v}$ vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \tag{1}$$

vektor az $\mathcal{A}$ altér $\mathbf{v}$-hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B Megmutatjuk, hogy az (1) szerinti pont van legközelebb $\mathbf{v}$-hez:

$$(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 = \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i\right)^2 = \mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2.$$

$\mathbf{v}$ és az altér egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorának távolságnégyzete:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 = \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{e}_i\right)^2 = \mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} c_i^2.$$

Ortogonális és ortonormált bázis

A különbségük pozitív, tehát valóban $\hat{\mathbf{v}}$ van $\mathbf{v}$-hez legközelebb:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2-(\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}})^2\\
&\quad=\left(\mathbf{v}^2-2\sum_{i=1}^{k}c_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)+\sum_{i=1}^{k}c_i^2\right)-\left(\mathbf{v}^2-\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)^2\right)\\
&\quad=\sum_{i=1}^{k}c_i^2-2\sum_{i=1}^{k}c_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)+\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)^2\\
&\quad=\sum_{i=1}^{k}(c_i-\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

Ebből a legjobb közelítés tétele szerint kapjuk, hogy $\hat{\mathbf{v}}=\operatorname{proj}_{\mathcal{A}}\mathbf{v}$.

Ortogonális mátrixok

D Egy valós négyzetes mátrix ortogonális, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy négyzetes legyen, szemiortogonális mátrixról beszélünk.

P A forgatás, tükrözés mátrixa, és minden permutációmátrix ortogonális.

T Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor $\mathbf{Q}$ szemiortogonális $\iff$ $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ ($m \leq n$ esetén $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$)

B sorvektorszor oszlopvektor

T Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
- $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
- $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.
- $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.
- $\mathbf{Q}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

Á $|\det(\mathbf{Q})| = 1$, $\mathrm{O}(n)$ és $\mathrm{SO}(n)$ zárt a szorzásra és invertálásra nézve.

Ortogonális mátrixok geometriája

T **Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés** Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

a) $\mathbf{Q}$ ortogonális.
b) $|\mathbf{Qx}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.
c) $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális, akkor $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, így tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|\mathbf{Qx}|^2 = \mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qx} = (\mathbf{Qx})^\mathsf{T}(\mathbf{Qx}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$.

b) $\Rightarrow$ *c)*: A skalárszorzás abszolút értékkel való kifejezéséből:

$$\begin{aligned}\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Qx} + \mathbf{Qy}|^2 - |\mathbf{Qx} - \mathbf{Qy}|^2\right) = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 - |\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\right.\\ &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2\right) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ *a)*: A $\mathbf{Q}$ mátrix i-edik oszlopa $\mathbf{q}_i = \mathbf{Qe}_i$

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{Qe}_i \cdot \mathbf{Qe}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi

T Minden $O(2)$-be eső ortogonális mátrix vagy egy α szögű forgatás, vagy egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa, azaz

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

T A harmadrendű 1 determinánsú ortogonális transzformációk a forgatások, a -1 determinánsúak, azaz $O(3) - SO(3)$ elemei egy tükrözés és egy forgatás egymás utáni alkalmazásával megkaphatók.

Givens-forgatás

D Givens-forgatás: forgatás, mely egy koordinátasík vektorain kívül minden más vektort helyben hagy. Az i-edik és j-edik koordinátákra:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

M E forgatással elérhető például, hogy egy $\mathbf{x}$ vektort egy olyan vektorba forgassunk, melynek j-edik koordinátája 0. Csak az i-edik és j-edik sorokat és oszlopokat kiemelve

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\alpha = \frac{a}{r},\ \sin\alpha = -\frac{b}{r}$$

Householder-tükrözés

D Householder-tükrözés: Egy adott $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözést Householder-tükrözésnek nevezzük. Mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}$$

T Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két különböző, de azonos hosszúságú vektor $\mathbb{R}^n$-ben, akkor az $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\perp$ hipersíkra való H-tükrözés $\mathbf{a}$-t és $\mathbf{b}$-t fölcseréli.

B Megmutatjuk, hogy $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{Hb} = \mathbf{a}$, ahol
$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}$.
$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}-\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}-\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a}+\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}-\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{Ha} &= \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{Hb} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

T **Gram–Schmidt-ortogonalizáció** Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén

$$\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i). \tag{2}$$

Az ortogonális $\mathcal{V}$ rendszerből a vektorok normálásával kapott

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} \right\}$$

rendszer ortonormált.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

B $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \rightsquigarrow \mathrm{span}(\mathbf{a}_1) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1)$.
A $\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teljesüléséhez:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\mathbf{a}_2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

E vektor nem 0-vektor, hisz $\mathbf{v}_2 = 0$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{a}_1$ lenne, azaz $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem lenne független.
$\rightsquigarrow \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ...
kiszámoljuk az $\mathbf{a}_{i+1}$ vektornak a $\mathrm{span}(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|})$ altérre merőleges összetevőjét, ez lesz $\mathbf{v}_{i+1}$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i$$

$\mathbf{v}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben $\mathcal{A}$ nem volna független. $\mathbf{v}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és $\mathbf{a}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

P Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M Először keressünk egy ortogonális bázist:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1, 1, 1, 1) \\
\mathbf{v}_2 &= (3, -1, 3, -1) - \frac{(3, -1, 3, -1) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2) \\
\mathbf{v}_3 &= (6, 2, 2, -2) - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\
&\qquad - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2)
\end{aligned}
$$

Végül az ortonormált bázis:

$$
\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}
$$

A QR-felbontás

D Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást QR-felbontásnak vagy redukált QR-felbontásnak nevezzük,

ha $\mathbf{Q}$ az $\mathbf{A}$-val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és

$\mathbf{R}$ négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.

T Teljes oszloprangú valós mátrix QR-felbontása létezik és egyértelmű.

A $\mathbf{Q}$ mátrixot ortonormált oszlopvektorok hozzávételével kiegészíthetjük egy ortogonális mátrixszá, az $\mathbf{R}$ mátrixot pedig zérussorok hozzávételével egy $m \times n$-es felső háromszögmátrixszá, akkor e mátrixok szorzata is $\mathbf{A}$, ugyanis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}$$

Ezt nevezzük teljes QR-felbontásnak.

A QR létezése a Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárásból: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ teljes oszloprangú ($k \le n$), a $\mathbf{q}$-vektorokra: $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ értékre, ezért léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= r_{11}\mathbf{q}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_k &= r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k.
\end{aligned}$$

Ezt mátrixszorzat-alakba írva épp a kívánt felbontást kapjuk:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\quad \mathbf{a}_2\quad \dots\quad \mathbf{a}_k] = [\mathbf{q}_1\quad \mathbf{q}_2\quad \dots\quad \mathbf{q}_k] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{v}_i|$, tehát $r_{ii} > 0$.
$\mathbf{R}$ kiszámítása: $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{I}_k\mathbf{R} = \mathbf{R}$, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}$.

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

P QR-felbontását Givens-forgatásokkal: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

M $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\sin\alpha = -3/5$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q_1 A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q_2 Q_1 A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q_3 Q_2 Q_1 A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q_1} = \mathbf{H_1} \qquad \mathbf{Q_2} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{H_2} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad \mathbf{Q_3} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{H_3}$}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

P QR-felbontását Householder-módszerrel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

M $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ trafóhoz $\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$(4, 3) \mapsto (5, 0)$ transzformációh $\mathbf{a} = (4, 3) - (5, 0) = (-1, 3)$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú $m \times n$-es valós mátrix, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és $\mathbf{b}$ egy $\mathbb{R}^m$-beli vektor.

Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, ami megkapható az $\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B Optimális megoldás a normálegyenletből:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után}\\
(\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{b} && \\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1} \text{ mátrixszal}\\
\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}. &&
\end{aligned}
$$

Komplex vektorok skaláris szorzata

? komplex számok skaláris szorzata

$$(1, \mathrm{i}) \cdot (1, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

D lehetőségek:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n.$$

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix adjungáltján (vagy Hermite-féle transzponáltján) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^\mathsf{H}$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^\mathsf{H} = \overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T}$.

D $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n = \mathbf{z}^\mathsf{H} \mathbf{w}$.

Adjungált és a skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor

- $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}} + \mathbf{B}^{\mathsf{H}}$,
- $(c\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \overline{c}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$
- $(\mathbf{AB})^{\mathsf{H}} = \mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

D A komplex skaláris szorzás segítségével – a valós esethez hasonlóan – definiálható a komplex vektorok távolsága és szöge, és így a merőlegessége is.

Önadjungált – Hermite-féle – mátrixok

D **A** önadjungált, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$.

P Melyik önadjungált?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

az első kettő

Unitér mátrixok

D Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Á Az alábbiak ekvivalensek:

- $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$,
- $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
- $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

M A Fourier-sorok komplex alakja, és részletösszegei (diszkrét Fourier-összeg):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n\mathrm{i}t} \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{n\mathrm{i}t} = c_0 + c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_1 e^{2\mathrm{i}t} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)\mathrm{i}t}$$

Á A $(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \mapsto (g(0), g(\frac{2\pi}{N}), \ldots, \frac{2(N-1)\pi}{N}))$ leképezés lineáris, és mátrixa $[\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}mn}]$ $(0 \le m, n < N)$.

P A $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ jelöléssel

$$y_0 = c_0 + c_1 e^{i0} + c_2 e^{2i0} = c_0 + c_1 + c_2$$
$$y_1 = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{3}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2$$
$$y_2 = c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi i}{3}} + c_2 e^{\frac{8\pi i}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^4$$

a $(c_0, c_1, c_2) \mapsto (y_0, y_1, y_2)$ leképezés lineáris, mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Általánosan:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}0} + c_2 e^{2\mathrm{i}0} + \dots + c_{N-1} e^{(N-1)\mathrm{i}0} = c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1} \\
y_1 &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{N}} + \dots + c_{N-1} e^{\frac{2(N-1)\pi \mathrm{i}}{N}} \\
&\vdots \\
y_{N-1} &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi \mathrm{i}(N-1)}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi \mathrm{i}(N-1)}{N}} + \dots + c_{N-1} e^{\frac{2\pi \mathrm{i}(N-1)^2}{N}}
\end{aligned}
$$

Az $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$ jelöléssel mátrixszorzat-alakban

$$
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{N-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(N-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \varepsilon^{2(N-1)} & \varepsilon^{3(N-1)} & \cdots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}
$$

D Fourier-mátrixok: az $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$, $\omega = \overline{\varepsilon} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N}$ jelölésekkel:

$$\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon} = \mathbf{V}_N(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \dots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \mathbf{V}_N(1, \omega, \dots, \omega^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

T A Fourier-mátrixok tulajdonságai:

- Bármelyik Fourier-mátrix k-adik és $N-k$-adik sora egymás konjugáltja, páros N esetén pedig az $N/2$-edik sorvektor $(1, -1, 1, -1, \dots)$.
- $\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon} = \mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}^{\mathsf{H}}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\omega} = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}^{\mathsf{H}}$
- $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = N\mathbf{I}_N$, így $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ invertálható,

$$\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}, \quad \mathbf{\Phi}_{N,\omega}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon},$$

továbbá $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ unitér.

M A továbbiakban

$$f(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit}$$

függvényből indulunk ki, a megadott helyek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N részre osztó ${}^{2k\pi}/_{N}$ $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ pontok. A $F_N : (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \mapsto (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ $\mathbf{F}_N = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}$, amelyre a továbbiakban az

D Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) Az $F_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{F}_N\mathbf{x}$

P Az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$ és $\mathbf{F}_8$ mátrixok:

$$\mathbf{F}_1 = [1], \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

T A DFT tulajdonságai

- Konstans vektor képe impulzusvektor (melynek a nulladikat kivéve mindegyik koordinátája 0), és fordítva, konkrétan

$$F_N(c, c, \dots, c) = (Nc, 0, \dots, 0), \quad F_N(c, 0, \dots, 0) = (c, c, \dots, c).$$

  ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges konstans.
- Ha $\mathbf{x}$ valós vektor, akkor $X_{N-k} = \overline{X}_k$.
- Az F_N transzformáció invertálható, inverze (IDFT) többféle felírásban:

$$\mathbf{x} = F_N^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{N}\Phi_{N,\varepsilon}\mathbf{X}, \quad x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \varepsilon^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}kn}.$$

- DFT kiszámításához N^2 művelet
- két fele akkora méretű Fourier-transzformációból megkapható:

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N}2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N}(2n+1)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N/2}nk} + \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N}k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N/2}nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \omega_{N/2}^{nk} = E_k + \omega_N^k O_k.
\end{aligned}
$$

E_k és O_k $N/2$ szerint periodikusak $\rightsquigarrow E_{k+N/2} = E_k$, $O_{k+N/2} = O_k$

Innen $k < N/2$ esetén $X_k = E_k + \omega_N^k O_k$, $X_{k+N/2} = E_k - \omega_N^k O_k$.

A műveletigény $\frac{3}{2} N \log N$.

```
function FFT(x)
    N ← dim(x)
    X legyen N-dimenziós vektor
    if N = 1 then
        X_0 ← x_0
    else
        y ← x páros indexű elemei
        z ← x páratlan indexű elemei
        Y ← FFT(y)
        Z ← FFT(z)
        for k ← 0 to N/2 − 1 do
            E ← Y_k
            O ← e^(−2πi/N · k) Z_k
            X_k ← E + O
            X_{k+N/2} ← E − O
    return X
```

M FFT mátrixszorzat-alakja

$$\mathbf{F}_N = \boldsymbol{\Delta}_N \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_N,$$

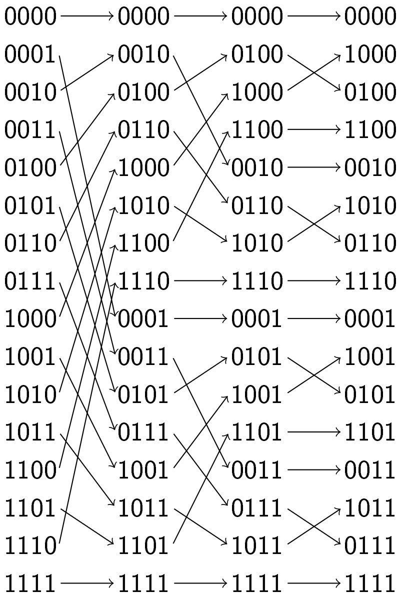
$\boldsymbol{\Pi}_N$ az a permutációs mátrix, mely előre veszi a páros indexű elemeket, $\boldsymbol{\Delta}_N$ a „fél” transzformáltakat összeadó, és a páratlan indexűeket egy ω-hatvánnyal beszorzó mátrix.

$$\boldsymbol{\Pi}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Pi}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Delta}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{D}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{D}_4 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{\Delta}$ mátrixokban szereplő diagonális mátrixok az egységmátrixok, és az ω hatványait tartalmazó $\mathbf{D}$ mátrixok, ahol $\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{k-1})$. Pl.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_8 &= \mathbf{\Delta}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8 \\
&= \mathbf{\Delta}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Delta}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8 .
\end{aligned}$$


0000 0000 0000 0000
0001 0010 0100 1000
0010 0100 1000 0100
0011 0110 1100 1100
0100 1000 0010 0010
0101 1010 0110 1010
0110 1100 1010 0110
0111 1110 1110 1110
1000 0001 0001 0001
1001 0011 0101 1001
1010 0101 1001 0101
1011 0111 1101 1101
1100 1001 0011 0011
1101 1011 0111 1011
1110 1101 1011 0111
1111 1111 1111 1111