Mátrixok sajátságai

Wettl Ferenc

2015. március 27.

D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

Á A λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$-vel.

D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

Á A λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$-vel.

D Sajátaltér

- D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.
- Á A λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$-vel.
- D Sajátaltér
- D karakterisztikus egyenlet: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

Á A λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$-vel.

D Sajátaltér

D karakterisztikus egyenlet: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Á Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$
$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

Á A λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$-vel.

D Sajátaltér

D karakterisztikus egyenlet: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Á Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$
$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

D algebrai multiplicitás k, ha λ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke

D algebrai multiplicitás k, ha λ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke

D geometriai multiplicitás d, ha sajátaltér dimenziója d

D **algebrai multiplicitás** k, ha λ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke

D **geometriai multiplicitás** d, ha sajátaltér dimenziója d

T $1 \leq d \leq k$

T Az **A** mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: trivi

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: trivi

$n > 2$:

$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: trivi

$n > 2$:

$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}$.

invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, amiből $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: trivi

$n > 2$:

$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}$.

invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, amiből $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

negatív kitevő: $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, amiből $\lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}$.

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: trivi

$n > 2$:

$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$

invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, amiből $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

negatív kitevő: $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, amiből $\lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}$.

T Mátrix hatványainak hatása $\mathbf{A}$ $n \times n$-es, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$, $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_k$ hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_k\mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \dots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k.$$

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

- ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

- ha **A** szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- ha **A** ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- ha **A** ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,
- **A** pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

Á ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

Á $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$.

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

Á ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

Á $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$. Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

Á ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

Á $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$.
Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.
Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

Á ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

Á $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$.

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.

$\mathbf{A}$ ortogonális: bármely $\mathbf{x}$-re $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

Á ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

Á $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$.

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.

$\mathbf{A}$ ortogonális: bármely $\mathbf{x}$-re $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$

Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, és λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, akkor λ^k sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak, annak viszont csak a 0 sajátértéke, így $\mathbf{A}$-nak is minden sajátértéke 0.

Á ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,

Á ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,

Á $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$.

Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.

$\mathbf{A}$ ortogonális: bármely $\mathbf{x}$-re $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$

Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, és λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, akkor λ^k sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak, annak viszont csak a 0 sajátértéke, így $\mathbf{A}$-nak is minden sajátértéke 0.

Az állítás megfordítása a Cayley–Hamilton-tételből következik.

T Speciális komplex mátrixok sajátértékei Ha az n-edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix

T **Speciális komplex mátrixok sajátértékei** Ha az n-edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix

- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós, T **Speciális komplex mátrixok sajátértékei** Ha az n-edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix

- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
- ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,

T Speciális komplex mátrixok sajátértékei Ha az n-edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix

- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
- ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

D Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

D Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

T Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

D Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

T Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

B $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}, \end{aligned}$$

Hasonló mátrixoknak pedig determinánsuk és nullterük dimenziója is azonos.

D Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

T Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

B $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}, \end{aligned}$$

Hasonló mátrixoknak pedig determinánsuk és nullterük dimenziója is azonos.

K Lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja definiálható

D **A** diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$).

D **A** diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz ($\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$).

T **A** diagonalizálható $\iff$ **A**-nak van n lineárisan független sajátvektora.

D $\mathbf{A}$ diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$).

T $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora.

B $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} \iff \mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$$

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$$

D **A** diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$).

T **A** diagonalizálható $\iff$ **A**-nak van n lineárisan független sajátvektora.

B $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$$

$\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$

D Sajátfelbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$

D Bal sajátvektor: $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^T$ $(\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y})$

D Bal sajátvektor: $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y})$

M $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow$ a bal és jobb sajátértékek azonosak

D **Bal sajátvektor:** $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y})$

M $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow$ a bal és jobb sajátértékek azonosak

M $\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$: $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai

D **Bal sajátvektor:** $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^T$ $(\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y})$

M $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^T) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow$ a bal és jobb sajátértékek azonosak

M $\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$: $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai

D **Sajátfelbontás diadikus alakja:**

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n^T$$

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}.$$

B $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$...tetszőleges nemnegatív k egészre $\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1}$ $\rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$.

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

B $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$...tetszőleges nemnegatív k egészre $\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1}$ $\rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$.

T Cayley–Hamilton-tétel: Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $p_{\mathbf{A}}$, akkor $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

B $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ $\rightsquigarrow$
$\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$... tetszőleges nemnegatív k egészre
$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1}$ $\rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$.

T Cayley–Hamilton-tétel: Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $p_{\mathbf{A}}$, akkor $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

M Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor trivi, ui. ha $p_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

T Ha λ_1, $\lambda_2, \dots$ λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \dots$ $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

T Ha λ_1, λ_2,... λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$, T Ha λ_1, λ_2,… λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,… $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.$$

T Ha λ_1, λ_2,... λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_i &= \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},\\ \lambda_i\mathbf{x}_i &= c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.\end{aligned}$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.

T Ha λ_1, $\lambda_2, \dots$ λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \dots$ $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$
$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.
Kivonva:

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1},$$

T Ha λ_1, $\lambda_2, \ldots$ λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}_i &= \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},\\
\lambda_i\mathbf{x}_i &= c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.
\end{aligned}$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.
Kivonva:

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1},$$

Mivel az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lineárisan függetlenek,
$c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, ellentmondás.

T Ha λ_1, $\lambda_2, \ldots$ λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$
$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.
Kivonva:

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1},$$

Mivel az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lineárisan függetlenek, $c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, ellentmondás.

K Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

T **Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás** Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

T Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

B !

T **Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás** Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

B !

M Egy $\mathbb{T}$ test fölötti n-edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a $\mathbb{T}^n$ tér előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

T **Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás** Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

B !

M Egy $\mathbb{T}$ test fölötti n-edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a $\mathbb{T}^n$ tér előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

P geometriai példák

M Blokkosításból:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix}.$$

M Blokkosításból:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{C\Lambda C}^{-1}$ felbontás:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C\Lambda C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_k\mathbf{X}_k\mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \\ &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyre

T **Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása:** A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

T **Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása:** A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,

T Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása: A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,

T **Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása:** A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

T **Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása:** A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

B $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

T Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása: A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

B $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.
$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ $(i \neq j) \rightsquigarrow$
$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}$.

T Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása: A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

B $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ $(i \neq j) \rightsquigarrow$

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}$.

$\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i$, azaz $\mathbf{P}_i$ vetítés.

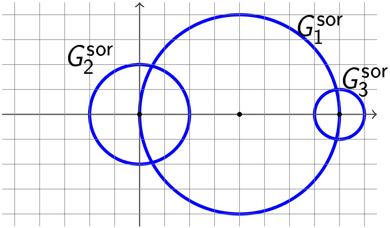
D Gersgorin-körök: Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \ldots, n$), ahol

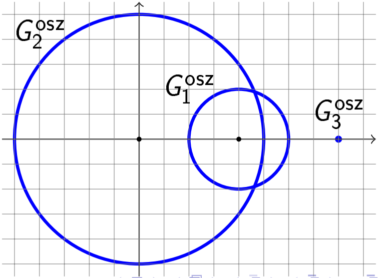
$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{1}$$

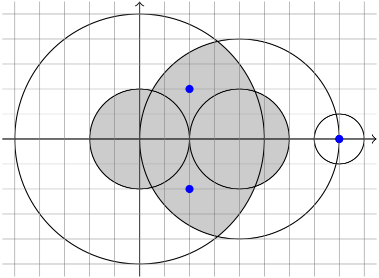
D Gersgorin-körök: Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{1}$$

P Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:







T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\mathrm{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\mathrm{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\mathrm{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\mathrm{osz}})$,

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \leq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.
$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \leq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1-r)\,\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

T **A** valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.
$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1-r)\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is. (Hisz Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót)

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne).

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne). Legyen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne).
Legyen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m\\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne).
Legyen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

Tehát ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T **Hatványmódszer:** Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

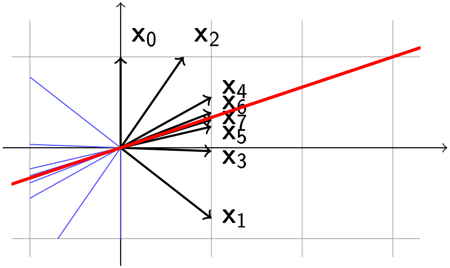
T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

T **Hatványmódszer:** Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}).$$

T Valós spektráltétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

T Valós spektráltétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

T Valós spektráltétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

$(\Leftarrow)$ teljes indukció, $n = 1$ OK.

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

T Valós spektráltétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

$(\Leftarrow)$ teljes indukció, $n = 1$ OK.

$\mathbf{A}$ szimmetrikus, így minden sajátértéke valós. $(\lambda, \mathbf{u}_1)$ egy sajátpár, $\mathbf{u}_1$-et kigészítjük ONB-sá: $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_n]$.

$$
\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B},
$$

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

Másrészt $\mathbf{B}^T = (\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^T = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}$,

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

Másrészt $\mathbf{B}^T = (\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^T = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}$,
azaz $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

Másrészt $\mathbf{B}^T = (\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^T = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}$,
azaz $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!
$\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow$ sajátértékeik megegyeznek $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke $\rightsquigarrow$ (teljes indukció miatt) $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Q}_1^T$.

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

Másrészt $\mathbf{B}^T = (\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^T = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}$,
azaz $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!
$\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow$ sajátértékeik megegyeznek $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke $\rightsquigarrow$ (teljes indukció miatt) $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Q}_1^T$.
$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{smallmatrix}\right]$ ortogonális

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\right)^T\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}^T\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1\end{bmatrix}.$$

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$.

T Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^\mathsf{H}$.

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$.

T Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^\mathsf{H}$.

B Mint az előbb:

$$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

T Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^\mathsf{H}$.

B Mint az előbb:

$$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Indukció: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}.$$

D Felső Hessenberg-mátrix: a subdiagonális alatt minden elem nulla.

D Felső Hessenberg-mátrix: a subdiagonális alatt minden elem nulla.

P $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

D Felső Hessenberg-mátrix: a subdiagonális alatt minden elem nulla.

P
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{H}$ felső Hessenberg-mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QHQ}^\mathsf{T}$.

D $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

D $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

D $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

M Normális az összes komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér, valamint az összes valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix.

D $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér és $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \boldsymbol{\Lambda}$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

M Normális az összes komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér, valamint az összes valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix.

Vannak mások is

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix normális, mert

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}.\end{aligned}$$

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A} = \mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} &= (\mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H})^\mathsf{H}(\mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H}) = \mathbf{U\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{\Lambda U}^\mathsf{H}\\ &= \mathbf{U\Lambda\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H}\mathbf{U\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = (\mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H})(\mathbf{U\Lambda U}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{AA}^\mathsf{H}.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Schur: $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^\mathsf{H}$. Ha $\mathbf{A}$ normális, $\mathbf{T}$ is:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^\mathsf{H}\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AU})^\mathsf{H}(\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AU}) = \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{UU}^\mathsf{H}\mathbf{AU} = \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{AU}\\ &= \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AA}^\mathsf{H}\mathbf{U} = \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AUU}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AU})(\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AU})^\mathsf{H} = \mathbf{TT}^\mathsf{H}.\end{aligned}$$

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H})^\mathsf{H}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H}) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H}\\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H})(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{H}.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Schur: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^\mathsf{H}$. Ha $\mathbf{A}$ normális, $\mathbf{T}$ is:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^\mathsf{H}\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U})^\mathsf{H}(\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U}\\ &= \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{U} = \mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{U})^\mathsf{H} = \mathbf{T}\mathbf{T}^\mathsf{H}.\end{aligned}$$

$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & t_{nn}\end{bmatrix}$: ezért $[\mathbf{T}^\mathsf{H}\mathbf{T}]_{11} = |t_{11}|^2$,

$[\mathbf{T}\mathbf{T}^\mathsf{H}]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, amiből $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$. Hasonlóan a $[\mathbf{T}^\mathsf{H}\mathbf{T}]_{22}$ és a $[\mathbf{T}\mathbf{T}^\mathsf{H}]_{22}$ elemekből $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb. Tehát $\mathbf{T}$ diagonális.

P Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja: Írjuk fel az $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!

P Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja: Írjuk fel az $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!

M A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3\\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1\\
&= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2\\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

T **Főtengelytétel:** $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós szimmetrikus mátrix, $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ ortogonális diagonalizálása. Az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus formát az $\mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ kvadratikus formába transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. Választható $\mathbf{Q}$ úgy, hogy $\det(\mathbf{Q}) = 1$ legyen.

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;
- indefinit, ha $\mathbf{A}$-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;
- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden vezető főminora pozitív;

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;
- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden vezető főminora pozitív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.

Á A legalább kétszer differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a következő alakban írható fel:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$
$$+ \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ az f értelemzési tartományának egy belső pontja.