Jordan-féle normálalak

Wettl Ferenc

2015. április 16.

D $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció invariáns altere, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

T $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ invariáns altér L-re $\iff$ $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \dots, k)$.

T $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

alakú a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és a $\mathcal{W}$ egy-egy bázisának uniója.

B $L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \cdots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_{n-r}$

$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \cdots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

M Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix hatása a standard bázison:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ae}_1 &= 4\mathbf{e}_1 & & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{Ae}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 & \Rightarrow \quad & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{Ae}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 & & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Diagrammja

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

D Általánosított sajátvektor: valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Jordan-lánc: $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Jordan-bázis: általánosított sajátvektorokból álló bázis.

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

M karakterisztikus polinom $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = (4-\lambda)^3$

$\mathbf{A}$ sajátaltere 1-dimenziós: $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$

$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O}$, ezért van olyan $\mathbf{x}_3$ vektor, melyre $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$.

$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_3$ olyan vektor, melyre $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$

tehát $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2$ sajátvektor

Mivel $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ezért pl. az $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$ megfelel.

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$$

$\mathbf{A}$ alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, ahol $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3]$ (az általánosított sajátvektorok alkotta bázisból a standard bázisra való áttérés mátrixa):

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Jordan-normálalak
   - Direkt összeg
   - Általánosított sajátvektor
   - Jordan-tétel a normálalkról
   - A Jordan-alak egyértelműsége
   - Minimálpolinom

2. Mátrixfüggvények
   - Diagonalizálható mátrixok függvényei
   - Mátrixfüggvény kiszámítása a Jordan-alakból
   - Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix hasonló egy $\mathbf{J}$ Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz ($\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{1}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

M $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja

M = minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú.

- Jordan-felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$
- Minden $\mathbb{F}$ testre igaz, ha az összes sajátérték $\mathbb{F}$-beli.

B teljes indukció n-re:

Jelölje $\mathcal{N}_\lambda$ az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ megoldásainak terét, vagyis a λ-hoz tartozó sajátalteret, dimenzióját r.

$\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ dimenziója $n-r<n$

$\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altere $\mathbf{A}$-nak, ui. tetsz. $\mathbf{v}$-re
$\mathbf{A}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2-\lambda\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v})$

$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}|_{\mathcal{O}_\lambda}$. Indukciós feltevés, $\hat{\mathbf{A}}$-ra igaz:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p
\end{array}$$

$q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

$q = 0$ trivi, $q > 0$ esetén

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{y}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_q}^q & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{y}_q \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{z}_1 & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{z}_{r-q} & & & & & &
\end{array}
$$

$\sum_{j,k} \xi_{j,k} \mathbf{x}_k^j + \sum_t \eta_t \mathbf{y}_t + \sum_r \zeta_r \mathbf{z}_r = \mathbf{0}$ balról szorozva $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$-vel,
$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{s_t}^t$

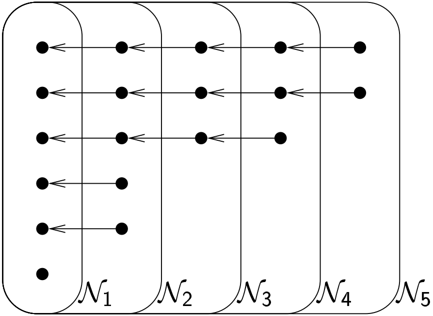
T Egy mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

B a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával: ez invariáns.

- a legnagyobb blokk mérete az a legkisebb s, melyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$: ez invariáns (ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, akkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}$ is.)
- a λ sajátértékhez tartozó i-hosszú Jordan-láncok számát jelölje n_i. Egyetlen s.ért. esetén

$$
\begin{aligned}
n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-1}\right)\\
n_{s-1}+2n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
n_{s-2}+2n_{s-1}+3n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-3}\right)\\
&\vdots\\
n_2+2n_3+\dots+(s-1)n_s &= \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\\
n_1+2n_2+\dots+(s-1)n_{s-1}+sn_s &= n.
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{r}((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i)$ rendre 19, 13, 8, 5, 2, 0. Vagy a $\dim(\mathcal{N}_i)$ rendre 0, 6, 11, 14, 17, 19 ($\mathcal{N}_i = \mathcal{N}((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i)$).



$$
\begin{aligned}
n_5 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^4\right) = 2 & & & n_5 &= 2\\
n_4 + 2n_5 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\right) = 5 & & & n_4 &= 1\\
n_3 + 2n_4 + 3n_5 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\right) = 8 & & \Rightarrow & n_3 &= 0\\
n_2 + 2n_3 + 3n_4 + 4n_5 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\right) = 13 & & & n_2 &= 2\\
n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 &= 19 & & & n_1 &= 1
\end{aligned}
$$

P $\mathbf{A}_{14\times 14}$ karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^5(2-\lambda)^5(1-\lambda)^4$.

$\mathbf{A}-3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$\mathbf{A}-\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

M $n=14$, $m(3)=5$, $m(2)=5$, $m(1)=4$.

- $\lambda=3$: a blokkok (Jordan-láncok) száma $n-\mathrm{r}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=14-12=2$ leghosszabb lánc $4=$ a legkisebb s, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{A}-3\mathbf{I})^s)=14-5=9$

$$\begin{aligned} n_4 &= 5-14+10=1 \\ n_3+2n_4 &= 5-14+11=2 \\ n_2+2n_3+3n_4 &= 5-14+12=3 \\ n_1+2n_2+3n_3+4n_4 &= 5 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 0 \\ n_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3 &= 5-14+10=1 \\ n_2+2n_3 &= 5-14+12=3 \\ n_1+2n_2+3n_3 &= 5 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_2 &= 1 \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= 4-14+11=1 \\ n_1+2n_2 &= 4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_2 &= 1 \\ n_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 3 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
$$

D $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ minimálpolinomja olyan minimális fokszámú $\mu_{\mathbf{A}}$ főpolinomot (1 főegyütthatójú), melyre $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. ($A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció minimálpolinomja hasonlóan)

- $\mu_{\mathbf{I}}(x) = x - 1$ ($\mu_{\mathbf{I}}(\mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$).
- $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, akkor minimálpolinomjaik egyenlőek, ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$ minden p polinomra.
- A minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára (lineáris transzformáció minimálpolinomja megegyezik bármely bázisban fölírt mátrixának minimálpolinomjával).

T $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$

a) $\mathbf{A}$-nak pontosan egy $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinomja van.
b) Bármely p polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ pontosan akkor áll fenn, ha p maradék nélkül osztható a $\mu_{\mathbf{A}}$ polinommal.
c) A $\chi_{\mathbf{A}}$ karakterisztikus polinom osztható a $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinommal.
d) $\mathbf{A}$ minden sajátértéke gyöke $\mu_{\mathbf{A}}$-nak.

M $\mathbf{A}$ nilpotens ($\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$). Ekkor $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^k$.

T $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ spektruma $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$, a λ_i sajátérték algbrai multiplicitása a_i, és $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ_i-hez tartozó legnagyonn Jordan-blokk mérete legyen m_i. Ekkor

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - lambda_i)^{m_i}.$$

- Diagonális mátrix hatványozása:

$$\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)^k = \operatorname{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k).$$

- Diagonalizálható mátrixok hatványozása $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C})^k = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}$ alapján.
- $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $\mathbf{\Lambda}$ diagonális, elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{\Lambda}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{\Lambda}^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^k\right) \\ &= \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)). \end{aligned}$$

- Ötlet:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \dots, \qquad \varrho(\mathbf{A}) < 1.$$

- M Sejtés: az f függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése számít!
- M Sejtés: hatványsor helyett elég polinomban számolni, mert a Cayley–Hamilton-tétel következtében egy n-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető.

- $f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \ldots + \dfrac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x-\lambda)^m + \ldots$
- $\mathbf{J}$ Jordan-blokk:

$$\mathbf{J} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, így

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)\mathbf{N} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{N}^{n-1}$$

D $\mathbf{A}$ spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, a λ_i-hez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendje n_i. f definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \ldots, n_i - 1, \; i = 1, \ldots, k$$

értékek léteznek.

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_k)$, n_i a $\mathbf{J}_i$ rendje. Ekkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\operatorname{diag}(f(\mathbf{J}_1), \ldots, f(\mathbf{J}_k))\mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_i)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ldots & \ldots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_i)}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \tag{2}$$

P $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

P Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ esetén

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P Általában

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1. Jordan-normálalak
   - Direkt összeg
   - Általánosított sajátvektor
   - Jordan-tétel a normálalkról
   - A Jordan-alak egyértelműsége
   - Minimálpolinom
2. Mátrixfüggvények
   - Diagonalizálható mátrixok függvényei
   - Mátrixfüggvény kiszámítása a Jordan-alakból
   - Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

M Ha f az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumán definiált függvény, akkor elég keresni olyan polinomot, amelyik azonos helyettesítési értékeket ad.

D $\mathbf{A}$ minimálpolinomja $\mu_{\mathbf{A}}$, tfh. f függvény definiálva van $\mathbf{A}$ spektrumán. Ekkor $f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$, ahol p foka kisebb $\mu_{\mathbf{A}}$ fokánál, és

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \ldots, n_i - 1, \; i = 1, \ldots, k$$

(ez az Hermite-féle interpolációs polinom)

M Ha $\mathbf{A}$-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású (Lagrange-féle interpolációs polinom):

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right).$$

M Ha $\mathbf{A}$-nak egyetlen sajátértéke λ, n az algebrai multiplicitása (f Taylor-polinomja):

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x-\lambda)^j}{j!}.$$

P $f(x) = x^3$, $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.
$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2$ foka $< 3 \rightsquigarrow$ van olyan elsőfokú polinom, mely **A**-ban azonos értéket ad.
$x^3 = (x-2)^2(x+4) + (12x - 16)$, azaz a maradék $12x - 16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

P Hermit-polinom: $p(x) = ax + b$, melyre

$$\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) &= 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) &= a. \end{aligned}$$

Innen $a = 12$, $b = -16$, ami megegyezik az előző eredménnyel.

P $e^{\mathbf{A}}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^3 \rightsquigarrow$ van legföljebb másodfokú Hermit-polinom: $p(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} e^x\big|_2 &= e^2 = p(2) = 4a + 2b + c \\ (e^x)'\big|_2 &= e^2 = p'(2) = 4a + b \\ (e^x)''\big|_2 &= e^2 = p''(2) = 2a. \end{aligned}$$

Innen $a = e^2/2$, $b = -e^2$, $c = e^2$, így

$$e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A}) = \frac{e^2}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$