

Nemnegatív mátrixok

Wetzl Ferenc

2015. április 24.

Mátrixok összehasonlítása

D $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, ha $a_{ij} > b_{ij} \forall i$ és j esetén

pozitív: $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ (nemnegatív: $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$), azaz ha $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$)

Á Néhány észrevétel:

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ vektorra,

$\mathbf{A} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra,

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} \geq \mathbf{Ay}$.

D A mátrixok pozitivitásának módjait 4 osztályba soroljuk:

A pozitív: $\forall i, j \quad a_{ij} > 0$

A primitív: $\exists k \forall i, j \quad a_{ij}^{(k)} > 0$

A irreducibilis: $\forall i, j \exists k \quad a_{ij}^{(k)} > 0$

A reducibilis: $\exists i, j \forall k \quad a_{ij}^{(k)} = 0$

- 1 Pozitív mátrixok
- 2 Nem negatív mátrixok
- 3 Sztochasztikus mátrixok

Perron-tétel

T Perron-tétel: pozitív sajátérték és sajátvektor Ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, akkor

- 1 $r > 0$,
- 2 r sajátérték egy pozitív sajátvektorral,
- 3 \mathbf{A} -nak e pozitív sajátvektor skalárszorosaival kívül nincs más nemnegatív sajátvektora.

D \mathbf{p} Perron-vektor és a \mathbf{q} bal Perron-vektor

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = r\mathbf{p}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \mathbf{q}^T\mathbf{A} = r\mathbf{q}^T, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1$$

T Perron-tétel: egyszeres és domináns sajátérték Ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, akkor

- 1 az r sajátérték algebrai multiplicitása 1,
- 2 r domináns, azaz minden további λ sajátértékre $|\lambda| < r$.

- 1 Pozitív mátrixok
- 2 Nem negatív mátrixok
- 3 Sztochasztikus mátrixok

A Perron-tétel nem áll a nemnegatív mátrixokra

A Perron-tétel pl. ezekre nem áll:

- a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{O}$, mindkét sajátértéke 0, ezért spektrálsugara is 0,
- az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{O}$ mátrix spektrálsugara 1, de az 1 kétszeres sajátérték, és több lineárisan független pozitív sajátvektor is tartozik hozzá,
- a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei 1 és -1 , így spektrálsugara ugyancsak 1, de a spektrálkörön több különböző sajátértéke is van,
- az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak nincs pozitív sajátvektora.

Ugyanakkor pl.

- az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{O}$, sajátértékei 2, -1 , spektrálsugara 2, ami egyszeres sajátérték, a spektrálkörön ez az egyetlen sajátérték, a hozzá tartozó $(1, 1)$ sajátvektor pozitív, és ennek konstansszorosait kivéve más pozitív sajátvektor nincs, mert a -1 -hez tartozó sajátvektor $(1, -2)$.

Mi igaz minden nemnegatív mátrixra

T Perron–Frobenius-tétel – gyenge változat Ha $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, akkor az $r = \rho(\mathbf{A})$ spektrálsugár sajátértéke \mathbf{A} -nak, melyhez tartozik nemnegatív sajátvektor.

B Alapötlet: $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

T Collatz–Wielandt-tétel Az $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mátrix r spektrálsugarára

$$r = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i}.$$

Másként megfogalmazva:

$$r = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \max_{c\mathbf{x} \leq \mathbf{A}\mathbf{x}} c$$

Mi igaz minden nemnegatív mátrixra

- K Nemnegatív mátrixok spektrálsugarának becslése** Ha $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, akkor a spektrálsugár a sorösszegek minimuma és maximuma, illetve az oszlopösszegek minimuma és maximuma közé esik, azaz

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(\mathbf{A}) \leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$$

$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(\mathbf{A}) \leq \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\}$$

- K Konstans sorösszeg vagy oszlopösszeg** Ha $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, és minden sorösszeg c , akkor a spektrálsugár c . (oszlopösszegre is)

Irreducibilis mátrixok

T Az $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mátrix pontosan akkor **reducibilis**, ha a sorok és oszlopok azonos permutációjával

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

alakra hozható, ahol \mathbf{X} és \mathbf{Z} négyzetes mátrixok (létezik olyan \mathbf{P} permutációmátrix, hogy \mathbf{PAP}^T a fenti alakú). Pontosan azok a mátrixok irreducibilisek, amelyek nem hozhatók ilyen alakra.

B csak az előjel számít, a nagyság nem.

G irányított gráf: i -edik csúcsból a j -edikbe pontosan akkor fut irányított él, ha $a_{ij} > 0$,

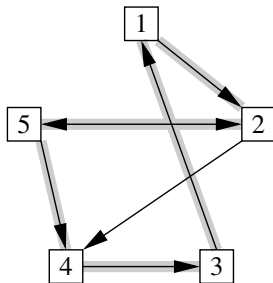
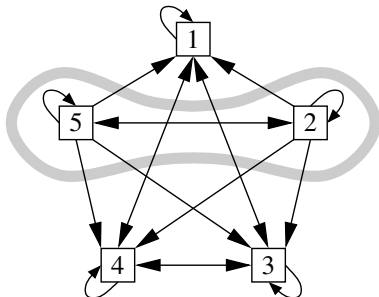
\mathbf{G} szomszédsági mátrixa \mathbf{A} -ból: a pozitív elemeket 1-re cseréljük $[\mathbf{G}^k]_{ij}$ eleme pontosan akkor pozitív, ha az i -edik csúcsból vezet k -hosszú irányított út a j -edik csúcsba

\mathbf{A} pontosan akkor irreducibilis, ha bármely két csúcs között vezet irányított út, azaz ha a gráf **erősen összefüggő**

Irreducibilis mátrixok

P reducibilis, vagy irreducibilis?

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 13 & 14 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 33 & 34 & 0 \\ 41 & 0 & 43 & 44 & 0 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}.$$



Irreducibilis mátrixok

- sorok és oszlopok azonos permutációja, nem elemi sorműveletek
- Összefoglalás:

A	algebrai feltétel		gráfelméleti feltétel
pozitív:	$\forall i, j$	$a_{ij} > 0$	irányított teljes gráf
primitív:	$\exists k \forall i, j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	\forall két csúcs között fut k -hosszú út
irreducibilis:	$\forall i, j \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	erősen összefüggő
reducibilis:	$\exists i, j \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$	nem erősen összefüggő

Perron–Frobenius-tétel 1.

T Ha az $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ irreducibilis, akkor

- 1 $r > 0$,
- 2 r sajátértéke \mathbf{A} -nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,
- 3 \mathbf{A} -nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,
- 4 r egyszeres sajátérték.

Primitív és imprimitív mátrixok

- M A Perron-tétel állításai közül nem maradt igaz az irreducibilis nemnegatív mátrixokra az, hogy a spektrálkörön csak egyetlen sajátérték van.
- T **Feltétel mátrix primitivitására** Ha $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ irreducibilis és főátlójában van pozitív elem, akkor primitív.
- B A gráfon!

Primitív és imprimitív mátrixok

P Döntsük el, hogy melyik mátrix primitív!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

M **A** reducibilis \rightsquigarrow nem primitív. (a többi irred.)

B pozitív \rightsquigarrow primitív.

$\mathbf{C}^3 = \mathbf{I}$ \rightsquigarrow nem primitív.

$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ reducibilis $\rightsquigarrow \mathbf{D}^{2m}$ is $\rightsquigarrow \mathbf{D}$ nem primitív.

Primitív és imprimitív mátrixok

Az \mathbf{E} mátrix irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem, ezért primitív.
Az \mathbf{F} primitív, mivel

$$\mathbf{F}^5 = \begin{bmatrix} 27216 & 20412 & 31104 \\ 36288 & 54432 & 57348 \\ 23814 & 46656 & 54432 \end{bmatrix} > \mathbf{O},$$

Egyszerűbben: $0 \mapsto 0$, pozitív $\mapsto 1$, szorzás \mapsto AND, összeadás \mapsto OR:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sőt, csak négyzetreemelésekkel még gyorsabb:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{F}^8 > \mathbf{O}$, tehát \mathbf{F} primitív.

Perron–Frobenius-tétel 2.

T Perron–Frobenius-tétel – sajátértékek a spektrálkörön Ha az $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ irreducibilis, akkor

- 1 a spektrálkör határára eső sajátértékek 1 multiplicitásúak, és $\{r, r\varepsilon, \dots, r\varepsilon^{k-1}\}$ alakba írhatók, ahol $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$,
- 2 \mathbf{A} pontosan akkor primitív, ha a spektrálkörén csak egy sajátérték van (azaz minden $\lambda \neq r$ sajátértékére $|\lambda| < r$),
- 3 \mathbf{A} pontosan akkor primitív, ha létezik a $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{A}/r)^k$ határérték. Ekkor e határérték megegyezik az \mathbf{A} spektrálfelbontásában szereplő, az r sajátértékhez tartozó vetítő mátrixszal, azaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{A}/r)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^T}{\mathbf{q}^T\mathbf{p}} > \mathbf{0},$$

ahol \mathbf{p} a Perron-vektor, \mathbf{q} a bal Perron vektor.

- 4 Ha \mathbf{A} imprimitív, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{I} + (\mathbf{A}/r)^2 + \dots + (\mathbf{A}/r)^{k-1}}{k} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^T}{\mathbf{q}^T\mathbf{p}} > \mathbf{0}.$$

- 1 Pozitív mátrixok
- 2 Nem negatív mátrixok
- 3 Sztochasztikus mátrixok

D A nemnegatív vektort **sztochasztikusnak** nevezzük, ha koordinátáinak összege 1 (azaz 1-normája 1). A nemnegatív **A** mátrix **sztochasztikus**, ha minden oszlopvektora sztochasztikus. (Sorsztoczasztikus, ha minden sora).

- Ha **A** és **v** sztochasztikus, akkor **u = Av** is:

$$\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^n v_j = 1.$$

- sztochasztikus mátrixok szorzata sztochasztikus mátrix.
- Az **A** mátrix pontosan akkor sztochasztikus, ha **A**-nak az $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ vektor bal sajátvektora 1 sajátértékkel.

T Ha **S** sztochasztikus mátrix, akkor

- 1 $\lambda = 1$ egy sajátérték,
- 2 a spektrálsugara 1, és
- 3 ha **S** primitív, akkor $\lambda \neq 1$ esetén $|\lambda| < 1$.

Duplán sztocasztikus mátrixok

- D Duplán sztocasztikus, ha sor- és oszlopsztocasztikus is
 - Duplán sztocasztikus mátrixok szorzata is duplán sztocasztikus.
 - Minden permutációmátrix duplán sztocasztikus.
 - Ha $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ unitér, akkor az $\mathbf{A} = [|u_{ij}|^2]$ mátrix duplán sztocasztikus, ugyanis $\sum_{i=1}^n |u_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^n |u_{ij}|^2 = 1$.
- T **Frobenius–Kőnig-tétel:** Az n -edrendű \mathbf{A} mátrixban pontosan akkor eleme minden kényónak a 0, ha \mathbf{A} részmatrixai közt van olyan $s \times t$ méretű zérusmátrix, hogy $s + t = n + 1$.
- K Minden duplán sztocasztikus mátrixban van legalább egy kényó, melynek minden eleme pozitív.
- T **Birkhoff-tétel:** Minden n -edrendű duplán sztocasztikus mátrix előáll permutációmátrixok konvex lineáris kombinációjaként, azaz a duplán sztocasztikus mátrixok az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben olyan konvex poliédert alkotnak, melynek csúcsai a permutációmátrixok. ($\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{P}_i$, ahol $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$, $c_i \geq 0$.)