Felsőbb Matematika **1. gyakorlat** **2015. február 11.**

1. Az a paraméter mely értékei mellet van az alábbi egyenletrendszereknek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert $\mathbb{F}_2$, illetve $\mathbb{F}_3$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Az alábbi $\mathbb{R}^3$ illetve $\mathbb{R}^4$ - beli vektorok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

$$a)\ \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\3\\-2\end{bmatrix},\ b)\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$c)\ \begin{bmatrix}3\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

4. Tekintsük $\mathbb{R}^4$ azon $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ elemeit, melyekre

$$a)\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, \quad b)\ x_1x_3 = x_2x_4, \quad c)\ x_3 \geq x_4,$$

$$d)\ \begin{aligned} 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 10x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \quad e)\ x_1 + 3x_2 = 4, \quad f)\ \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

A fenti részhalmazok közül melyek alkotnak alteret $\mathbb{R}^4$ - ben?

5. Legyen $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi $Span(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $Span(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, illetve $Span(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ alterei közül melyikben van benne a $\mathbf{d}$ vektor?

6. Keressen bázist az $\mathbb{R}^3$ alábbi altereiben, és írja fel a többi vektor e bázisbeli koordinátás alakját is!

$$Span\left(\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\right), \quad Span\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right),$$

$$Span\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right),\quad Span\left(\begin{bmatrix}1\\11\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\17\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

7. Határozza meg az alábbi mátrixok nullterét, sorterét valamint ezek dimenzióját!

$$\begin{bmatrix}3&3&3&3&3\\3&4&5&4&3\\3&2&1&2&3\\3&3&3&3&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&5&9\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&3&9\\2&4&8\\9&3&1\\8&4&2\end{bmatrix}.$$

8. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, majd ezt felhasználva az összes megoldását!

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=3\\2x_1+x_2-x_3&=2\\3x_1+2x_2&=5\end{aligned}\qquad \begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4&=3\\x_1+x_2-x_3-x_4&=1\end{aligned}$$

9. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&5&9\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&3&9\\2&4&8\\9&3&1\\8&4&2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}.$$