

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -20 \\ 4 & -1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$. $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Végezzük el a kijelölt mátrixműveletek közül azokat, amelyek értelmezve vannak: AB , $A + C$, $3A + B^T$, BA , CA , AC , C^2 , AA^T , CC^T .

2. Számítsa ki a következő mátrixok n -edik hatványát:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

3. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Adja meg az alábbi mátrixok LU felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Az együtthatómátrix LU -felbontását felhasználva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 8x_2 & = & -2 \\ -x_1 - x_2 & = & -2 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = & -4 \\ -2x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 & = & -1 \\ -x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ x_3 + 5x_4 & = & 7 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 + x_2 & = & 2 \end{array}.$$

6. Az LU -felbontást felhasználva határozzuk meg a 3. feladatban szereplő mátrixok inverzét!

7. Adja meg az alábbi mátrixok PLU felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7, 3, 3), (8, 1, 2), (4, 4, 3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (3, 2, 1)$ vektor \mathcal{C} bázisbeli alakját!

9. Határozzuk meg az alábbi mátrixok bázisfelbontását!

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 13 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 - a_1 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 - a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 - a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & 0 & \dots & 0 \\ c & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

11. Legyen A olyan 2015×2015 - ös mátrix, amelyre $\det(A^T) = \det(-A)$. Mennyi $\det(A)$?

12. Legyenek A, B tetszőleges $n \times n$ -es mátrixok. Igaz-e, hogy $\det(A^T B) = \det(BA)$? Igaz-e, hogy $\det^4(-A) = \det(A^4)$? Igaz-e, hogy ha $\det(A) = 1$, akkor $\det(A^{-1}B) = \det(AB)$? Van-e olyan A mátrix, amelyre $\det(A^T A) = 1$, viszont $\det(A) \neq 1$?

13. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyeletrendszereket a Cramer - szabály felhasználásával.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &= -2, & -x + 3y + 3z &= 2, & 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \\ -x_1 - x_2 &= -2, & 3x + y + z &= 4, & x_1 - x_2 - 2x_3 &= -7 \\ & & 2x - 2y + 3z &= 10, & 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

14. Határozzuk meg a 3. feladatban szereplő mátrixok inverzét előjeles aldeterminánsok segítségével.