1. Legyen d_i az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \ldots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d_i' = d_{i-1} - d_i$ és abból a $d_i'' = d_i' - d_{i+1}'$ (legyen $d_0 = n$, ahol n az $\mathbf{A}$ mérete és $d_{s+1}' = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

2. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{J}$ Jordan-féle normálalakját és adjuk meg $e^{\mathbf{J}}$ értékét!

3. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{J}$ Jordan-féle normálalakját és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

4. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\mathbf{A}$ minimálpolinomját! Adjuk meg azt a legkisebb fokú p polinomot, melyre $p(\mathbf{A}) = \sin \mathbf{A}$!

5. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Melyek primitívek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$