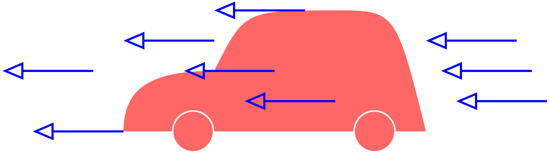
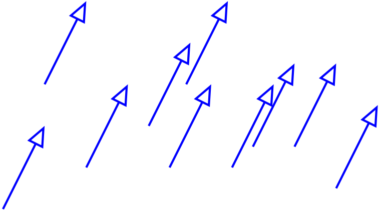
A lineáris algebra forrásai: egyenletrendszerek, vektorok

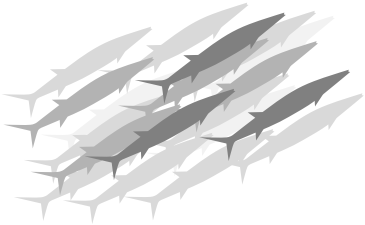
Wettl Ferenc

2016. február 23.

Szabad vektor



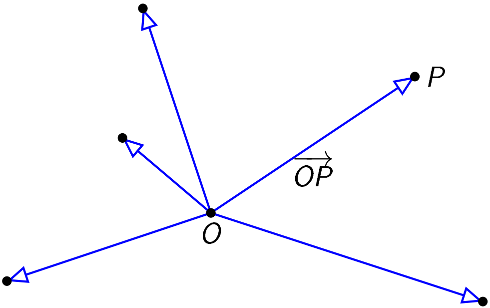




- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.
- Ekvivalencia reláció: két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. A vektorok az ekvivalenciaosztályok.

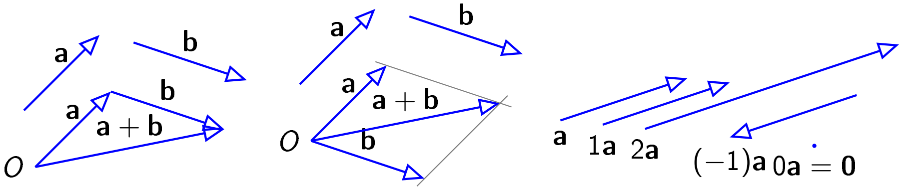
Origó

- A közös kezdőpont



- A pontok és a vektorok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Vektorműveletek



Tétel (A vektorműveletek tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:

a)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	*e)*	$r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$
b)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	*f)*	$r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$
c)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	*g)*	$(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$
d)	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	*h)*	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ és $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

E tulajdonságok vezetnek a vektortér általános fogalmához.

Lineáris kombináció

Definíció (Lineáris kombináció)

Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján egy

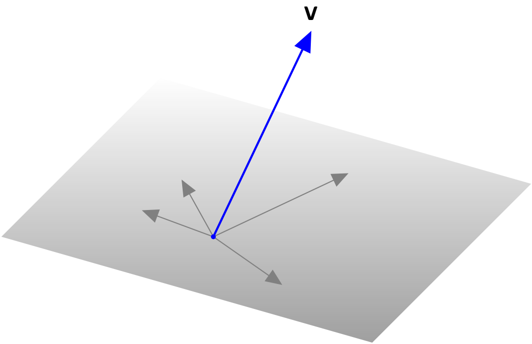
$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

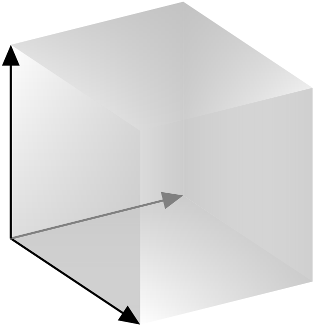
alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.

Vektorok lineáris függetlensége, lineáris összefüggősége

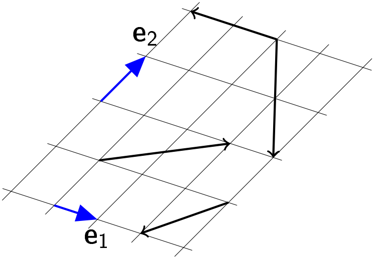
Definíció (Vektorok függetlensége)

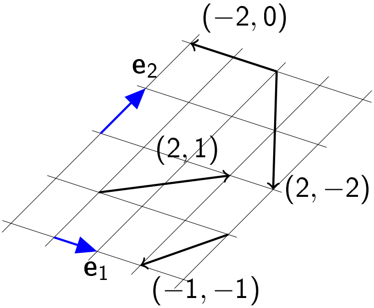
Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor lineárisan független az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ $(n \geq 1)$ vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ $(n \geq 2)$ vektorok lineárisan függetlenek ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük lineárisan függ a többitől, akkor e vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.


v

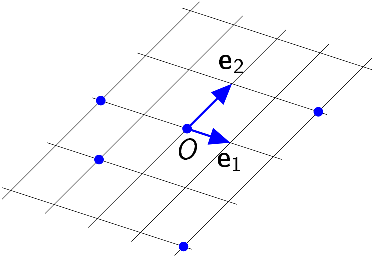


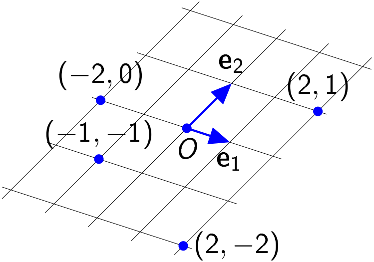
Vektorok koordinátái





Pontok koordinátái





Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció

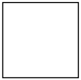
Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét és egyikük c-szeresét a következő képletekkel definiáljuk:

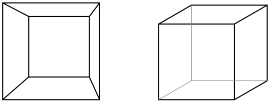
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n).$$

A vektorok tulajdonságai érvényben maradnak!

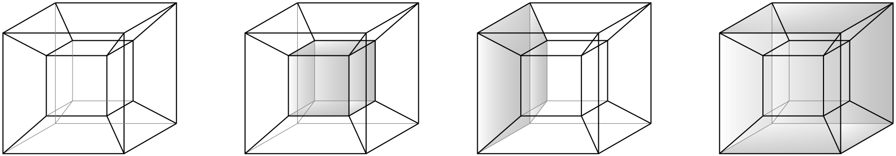
A négydimenziós kocka ábrázolása a síkban

1D:

2D: 

3D: 

4D:



Lineáris függetlenség

Tétel (Lineáris függetlenség)

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független, azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, $c_2, \dots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

Lineáris függetlenség

Bizonyítás

Ha a vektorrendszer csak egy vektorból áll, akkor valóban, pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn.

($\Longleftarrow$) Tfh valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$, vagyis átrendezés után $(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, így elő tudtuk állítani a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0.

($\Longrightarrow$) Ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként: $\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k$.

Test – számolunk, mint a valós számokkal

D Egy legalább kételemű $\mathbb{F}$ halmazt testnek (algebrai testnek) nevezünk, ha

1. értelmezve van $\mathbb{F}$ elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű bináris művelet,
2. az összeadás kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje (additív inverze),
3. a szorzás kommutatív, asszociatív, létezik egységelem és a nullelemen kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze (reciproka),
4. az összeadás a szorzásra nézve disztributív.

Á a nullelem és az egységelem szükségképpen különböző.

Á $0a = a0 = 0$.

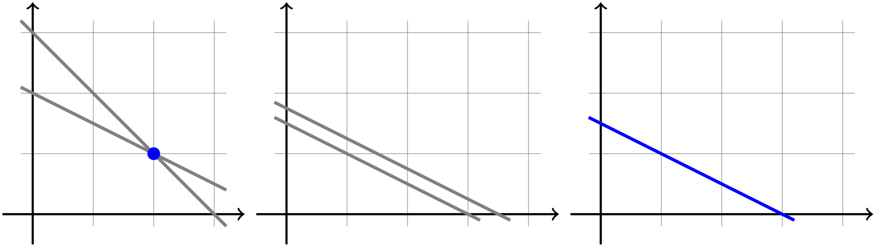
P $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ (prím modulusú maradékosztályok, más jelölések: $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{GF}(p)$).

Gyűrű – számolunk, mint az egészekkel

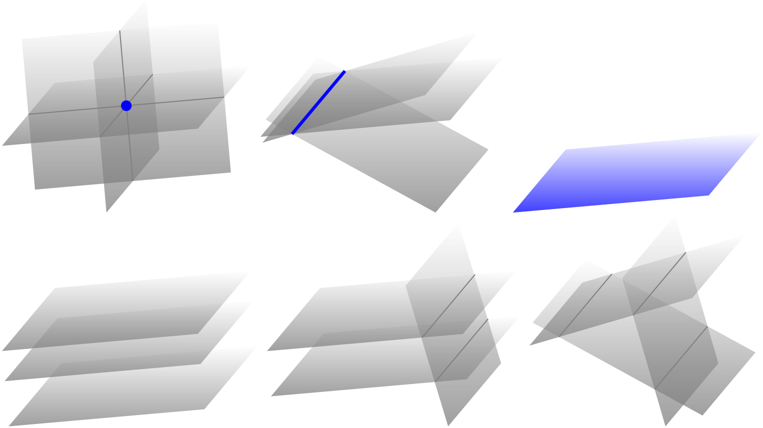
- D Ha a testnél definiált szorzás csak asszociatív, gyűrűről,
- D ha kommutatív is, kommutatív gyűrűről,
- D ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, egységelemes gyűrűről beszélünk.
- P Minden test gyűrű.
- P Z egységelemes kommutatív gyűrű, $\mathbb{N}$ nem gyűrű.
- P A páros számok kommutatív gyűrűt alkotnak, de ez nem egységelemes.
- P A $\mathbb{Z}_m$ egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha m prím.
- P A valós együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

Sormodell

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \text{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



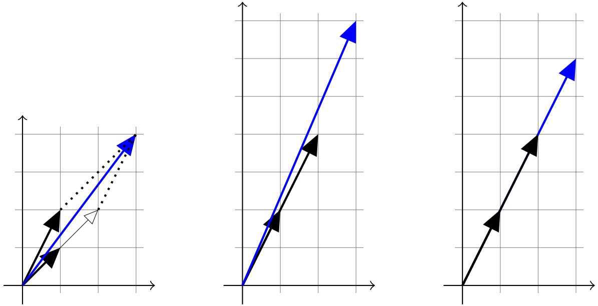
Sormodell 3D-ben



Oszlopmodell

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$



Alakzat implicit egyenletrendszere

Definíció

Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó (implicit) egyenletrendszer: a térnek az alakzathoz tartozó pontjai egyszerre minden egyenletét kielégítik, de más pontok nem. Vektoregyenlet: nem a pontok koordinátái, hanem a pontokba mutató vektorok szerepelnek. Álatalános alak:

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{illetve} \qquad \left\{\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ F_2(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}\right.$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a tér egy pontja, és $\mathbf{x}$ az oda mutató vektor.

Alakzat explicit egyenletrendszere

Definíció

Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó (explicit) egyenletrendszere: az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned} \qquad \text{vagy vektoregyenlet alakban} \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $t_i \in I_i \subseteq \mathbb{R}$, és $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ függvény. (paraméteres egyenletrendszer)

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Lineáris egyenletrendszer

D Lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \qquad (*)$$

ahol x_1, x_2,... x_n az ismeretlenek, a_{ij} együttható, b_i konstans tag. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, ha csak egy is különbözik 0-tól, inhomogén.

- Lineáris az x és y változókban:

$$\begin{aligned} ax + y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad x + y = 1$$

Megoldás

D Lineáris egyenletrendszer megoldása a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es

megoldásvektor

D megoldáshalmaz (az összes megoldás halmaza)

D konzisztensnek (megoldható), inkonzisztens (nem megoldható).

m Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, túlhatározottnak nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, alulhatározottnak.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

T Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.
4. egy $0 = 0$ alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:
  - Sorcsere: két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.)
  - Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel)
  - Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$).

Lépcsős alak

Definíció

Egy mátrix (sor)lépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 0 & -5 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer

m A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

T Bármely test feletti mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.

B
1. nulloszlop letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk a 1 pontra.

Redukált lépcsős alak (rref)

D Egy mátrix redukált lépcsős, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Algoritmus: oszloponként haladva először a vezérelemek alatt, majd csak utána az utolsó oszloptól kezdve fölöttük eliminálunk!

Redukált lépcsős alakra hozás

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}$ mátrixot!

M1

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-2&2\\0&-4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&-1\\0&-4&4\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

M2

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

T A redukált lépcsős alak egyértelmű Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

Gauss–Jordan-módszer

- $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&2&3&2\\1&3&3&4\\1&2&1&5\end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2 S_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&\frac{1}{2}&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcr}x & = & 1\\ y & = & 3\\ z & = & -2\end{array}$$
- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss–Jordan-módszer – végtelen sok megoldás

- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_2]{1/2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \qquad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$,
- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Valós vektortér

Egyelőre vektoron $\mathbb{R}^n$ elemeit értjük.

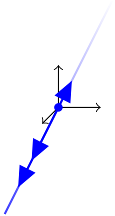
Definíció (Vektortér, altér)

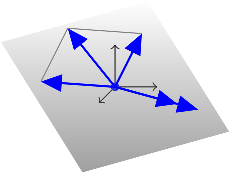
Vektortéren vektorok olyan nem üres $\mathcal{V}$ halmazát értjük, mely zárt a vektorösszeadás és a skalárral szorzás műveletére. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két vektortér és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U}$ vektortér a $\mathcal{V}$ vektortér altere. Jelölése: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

- Az $\mathcal{A}$ vektorhalmaz pontosan akkor vektortér, ha az $\mathcal{A}$-beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind $\mathcal{A}$-ban vannak.

Valós vektortér, test fölötti vektortér

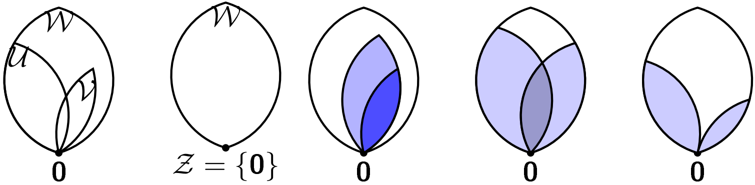
- Minden pozitív n egész esetén $\mathbb{F}^n$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött.
- $\mathbb{R}^2$-ben egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) alteret alkotnak.
- $\mathbb{R}^3$-ben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai alteret alkotnak.





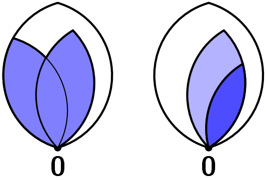
- Az $\mathbb{R}^3$ imént felsorolt alterei „olyanok”, mint az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$. (Ezt precízen a vektortér absztrakt definíciója és a vektorterek izomorfizmusának fogalma fogja tisztázni. Akkor fogjuk igazolni, hogy $\mathbb{R}^n$ alterei valóban mind „olyanok”, mint $\mathbb{R}^k$, ahol $k \leqslant n$.)

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük



- Minden altérnek eleme a nullvektor (bármely altérbeli vektor 0-szorosa is benne van).
- Minden altérbeli $\mathbf{x}$ vektorral együtt annak ellentettje (-1-szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az altérnek.
- Minden vektortér maga is altér (saját maga altere).
- $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ a zérustér altér. (NEM nulltér!).
- Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.
- Alterek metszete altér: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük



- Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik altere a másiknak.
- Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?
  - $\{ (x, y, z) \mid x = y,\ z = xy \}$,
  - $\{ (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$,
  - $\{ (x, y, z) \mid 2x - y + z = 0 \}$,
  - $\{ (x, y, z) \mid x = 2t,\ y = -t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R} \}$.
-
  - Nem. (Pl. $(1, 1, 1)$ benne van, $(2, 2, 2)$ nem.)
  - Nem. Nincs benne a nullvektor.
  - Igen. Az $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ normálvektorú sík. (Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a sík két vektora, azaz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$ és $\mathbf{n} \cdot (c\mathbf{x}) = 0$ is)
  - Igen. A $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ vektor skalárszorosai.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

Állítás (Megoldások altere)

Egy n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.

Definíció (Nulltér)

Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.

- Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix nullterét:
- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kifeszített altér

Definíció (Kifeszített altér)

$\mathcal{V}$ vektortér, a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített altérnek nevezzük, és $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$-val jelöljük.

Állítás (A kifeszített altér altér)

A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok által kifeszített $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ vektorhalmaz $\mathcal{V}$ egy altere.

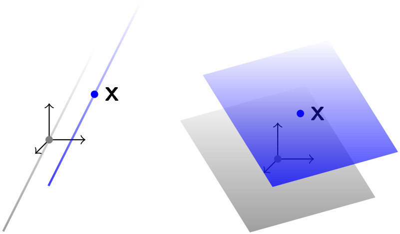
1. Vektor
   - A 2- és 3-dimenziós tér vektorai
   - Vektorok koordinátás alakban
   - $\mathbb{R}^n$
2. Algebrai struktúrák
   - Test és gyűrű
3. Lineáris egyenletrendszerek
   - Sor- és oszlopmodell
   - Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík
   - Lineáris egyenletrendszer és megoldásai
   - Megoldás kiküszöböléssel
4. Vektortér (light)
   - $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}^n$
   - Alterek
   - **Egyenletrendszer megoldásai**
   - Bázis
   - Dimenzió, rang
   - A lineáris algebra alaptétele valós mátrixokra

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

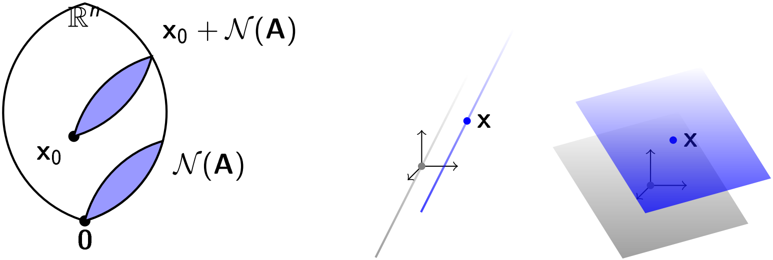
Tétel (Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai)

Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszerre:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén egy}\\ \text{partikuláris}\\ \text{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{homogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{array}}$$



D Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza egy altér eltoltja, melyet geometriai nyelven affin altereknek nevezünk.



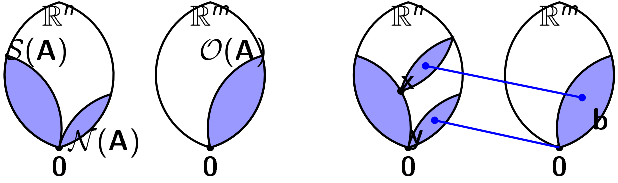
- Az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Mindegy melyik megoldást választjuk!

Sortér, oszloptér

Definíció (Sortér, oszloptér)

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük.

- Az $m \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere.
- Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ jelöli.



Egyenletrendszer megoldhatósága

Következmény (Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága)

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{A}$ oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

A megoldhatóság vizsgálata

P Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

- $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}\ (= \mathbf{w})$ megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

Lineáris függetlenség eldöntése

K Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k\end{bmatrix}$ mátrixot! Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- az $\mathbf{A}$ lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz $r(\mathbf{A}) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Bázis

D A $\mathcal{V}$ vektortér bázisán olyan vektorrendszert értünk, mely

1. lineárisan független,
2. generátorrendszer (mely kifeszíti $\mathcal{V}$-t).

P Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt $\mathbb{F}^n$ standard bázisának nevezzük.

Á A zérustérnek nincs bázisa

Bázis meghatározása – első megoldás

Példa (Altér bázisának meghatározása)

Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

Megoldás

Sorvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Bázis meghatározása – második megoldás

Megoldás

oszlopvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk.

Felírás bázisvektorok lineáris kombinációjaként

Megoldás

a redukált lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alak e bázisban

Példa (Vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B}$ bázisban)

Jelölje $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$ a bázist. A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kapjuk a négy vektor koordinátás alakjait:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Bázis és dimenzió

Állítás (Bázis ekvivalens definíciói)

Legyen $\mathcal{U}$ vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{U}$ alteret,
- $\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{U}$-t;
- $\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{U}$-ban.

Tétel (Bázis-tétel)

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van n-elemű bázisa, akkor minden bázisa n-elemű.

Definíció (Dimenzió)

A $\mathcal{V}$ vektortér n-dimenziós, ha van n-elemű bázisa. (véges dimenziós vektortér)

Mátrix, rang, dimenzió

Állítás (Dimenzió = rang)

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. (Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$.)

Tétel (Dimenziótétel)

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

Valós mátrixok sor- és nulltere

Definíció (Merőleges altér és merőleges kiegészítő altér)

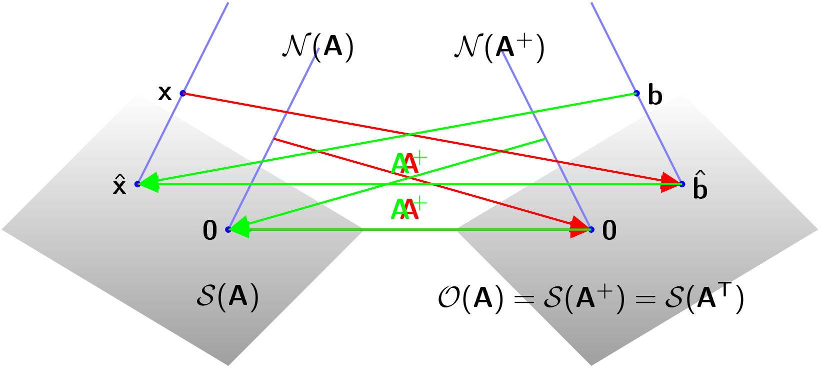
egy vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik altérből, és egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek egymásra. Egy $\mathcal{W}$ altérre merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ merőleges kiegészítő alterének nevezzük és $\mathcal{W}^{\perp}$-pel jelöljük („W perp").

Tétel (A lineáris algebra alaptétele)

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

- $\mathcal{S}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.
- $\mathcal{O}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.
- Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

Kitüntetett alterek



Valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldásai)

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

- egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
- a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
- az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.

A sortérbe eső megoldás megkeresése

Példa (Lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása)

Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2w &= 4 \\ x + 2y + z + 5u + 2w &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3w &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4w &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű megoldását!

A redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Így a megoldás:

$$(x, y, z, u, w) = (1, 1, 2, 0, 0) + (-1, -2, 0, 1, 0)u + (-1, 0, -1, 0, 1)w.$$

A redukált lépcsős alak szerinti egyenletrendszerhez ezt kell adni:

$$\begin{aligned} -x - 2y \quad\quad + u \quad\quad &= 0 \\ -x \quad\quad - z \quad\quad + w &= 0 \end{aligned}$$

Így a kiegészített egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15/17 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett megoldás $^1/_{17}(-4, 5, 19, 6, 15)$.