Mátrixok algebrája

Wettl Ferenc

2016. február 29.

Elemenkénti mátrixműveletek

- D mátrixok összege: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$
- D zérusmátrix
- D mátrix skalárszorosa: $c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}]$
- D mátrixok lineáris kombinációja

Lineáris helyettesítések kompozíciója

Tekintsük a következő két lineáris helyettesítést:

$$\begin{aligned} a &= 5x + y + 4z \\ b &= 4x + 4y + 2z \\ c &= 4x + 2y + 4z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= 7s + 30k \\ y &= 24s + 105k \\ z &= 8s + 40k \end{aligned} \tag{1}$$

Írjuk át táblázatba fejléccel:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 5 & 1 & 4 \\ b & 4 & 4 & 2 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & s & k \\ \hline x & 7 & 30 \\ y & 24 & 105 \\ z & 8 & 40 \end{array} \tag{2}$$

A két lineáris helyettesítés egymásutánja ekvivalens az

$$\begin{aligned} a &= 91s + 415k \\ b &= 140s + 620k \\ c &= 108s + 490k \end{aligned}$$

Lineáris helyettesítések kompozíciója

	s	k
x	7	30
y	24	105
z	8	40

	x	y	z
a	5	1	4
b	4	4	2
c	4	2	4

	s	k
a	91	415
b	140	620
c	108	490

Mátrixszorzás

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{tj} & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \end{bmatrix} \end{array}$$

A $m \times s$ **B** $t \times n$

feltéve, hogy $s = t$

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ típusa $m \times n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} b_{kj} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}$$

Blokkmátrixok

- Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \qquad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

- Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

Blokkmátrixok

Példa (Műveletek blokkmátrixokkal)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}\right].$$

Elvégezhetők a műveletek?

Blokkmátrixok

$$
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c}
2 & 6 \\ \hline
4 & 6 \\
9 & 7
\end{array}\right]
$$

Skaláris és diadikus szorzat, lineáris egyenletrendszer

- Skaláris szorzat:

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

- Diadikus szorzat:

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \ldots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \ldots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \ldots & u_mv_n \end{bmatrix}.$$

- Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, szimultán egyenletrendszerek: $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.
- Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Mátrixszorzás és lineáris kombináció

T Mátrixszorzás és lineáris kombináció: $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{x}$ n-dimenziós, $\mathbf{y}$ m-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax}$ szorzat az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ szorzat az $\mathbf{A}$ sorvektorainak

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

Báziscsere

D Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ és $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbb{F}^n$ két bázisa. A $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\,]$$

T Koordináták változása báziscserénél:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

összefüggés.

Bázisfelbontás

Á $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix

- redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló $r \times n$-es részmátrixát $\mathbf{R}$ $(r = \mathrm{r}(\mathbf{A}))$,
- $\mathbf{R}$ főoszlopainak megfelelő $\mathbf{A}$-beli oszlopok alkotta $m \times r$-es részmátrixot $\mathbf{B}$.

Ekkor az $\mathbf{R}$ mátrix j-edik oszlopa megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopának a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben:

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{*j}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Bázisfelbontás

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix}$.

M

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$$

Elemi mátrixok

D Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot elemi mátrixnak nevezzük.

P
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

T Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$-ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

Elemi mátrixok

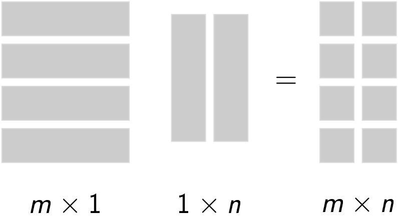
P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

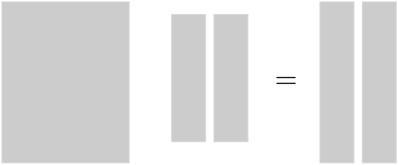
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

Sorvektorok · oszlopvektorok



$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

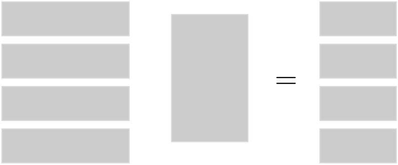
Mátrix · oszlopvektorok



1×1 $\quad$ $1 \times n$ $\quad$ $1 \times n$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \dots & \mathbf{Ab}_{*n} \end{array}\right]$$

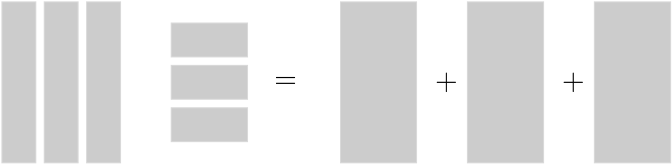
Sorvektorok · mátrix



$m \times 1$ $\quad 1 \times 1 \quad$ $m \times 1$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right] \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{a}_{2*}\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*}\mathbf{B} \end{array}\right]$$

Oszlopvektorok · sorvektorok



$1 \times t$ $\qquad$ $t \times 1$

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_{*1} & \dots & \mathbf{a}_{*t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{array}\right]. = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

E felbontásban az **AB** mátrixot diádok összegére bontottuk!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Szorzat oszlopai és sorai

T Az $\mathbf{AB}$ mátrix minden oszlopa az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a $\mathbf{B}$ sorainak lineáris kombinációja.

K $r(\mathbf{AB}) \leqslant \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$

Szorzás

!! A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.

!! Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor az $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ feltétel kevés ahhoz, hogy a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ következtetésre jussunk.

!! Az $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ egyenlőségből nem következik, hogy $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ a nullmátrix.

Á $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ csoportosíthatóság, asszociativitás

Á $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ disztributivitás

Á $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ disztributivitás

Á $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$

Á $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times t} = \mathbf{O}_{m\times t}$ szorzás nullmátrixszal

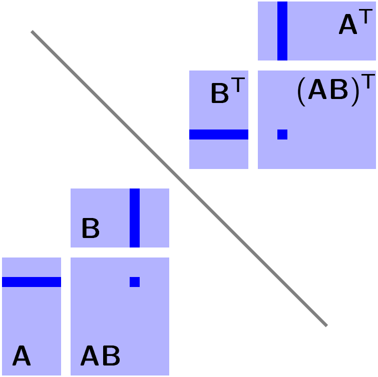
Á $\mathbf{I}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$ szorzás egységmátrixszal

Hatványozás

- Á $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$,
- Á $(\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}$,
- m $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k \rightsquigarrow \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$,

Transzponálás

- $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A}+\mathbf{C})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{C}^\mathsf{T}$,
- $(c\mathbf{A})^\mathsf{T} = c\mathbf{A}^\mathsf{T}$,
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.



Osztás

m A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ egyenletek megoldása különböző is lehet.

D Balról és jobbról való osztás (az egyik jele $\backslash$, a másiké $/$).

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \mathbf{B} && \Longrightarrow && \mathbf{X} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{B} && \mathbf{B} \text{ balról osztva } \mathbf{A}\text{-val,} \\ \mathbf{YA} &= \mathbf{B} && \Longrightarrow && \mathbf{Y} = \mathbf{B}/\mathbf{A} && \mathbf{B} \text{ jobbról osztva } \mathbf{A}\text{-val.} \end{aligned}$$

P
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Big\backslash \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{mert} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Big/ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{mert} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Inverz

D $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $\mathbf{A}$ invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ mátrixot $\mathbf{A}$ inverzének nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot szingulárisnak nevezzük.

D Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot nilpotensnek nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Á $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ inverze nilpotens $\mathbf{A}$ esetén:
$\mathbf{A}^k = \mathbf{O} \rightsquigarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$.

B
$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \ldots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Inverz kiszámítása

Á Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze megegyezik a sorművelet inverzének elemi mátrixával.

T A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Ha ilyen $\mathbf{B}$ mátrix létezik, az egyértelmű.

Á A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrix elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozható, ekkor $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$. Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja nem az $\mathbf{I}$ mátrix, akkor $\mathbf{A}$ nem invertálható.

B Az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ tekinthető szimultán egyenletrendszernek, amelyet az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ átalakítással oldunk meg!

Inverz kiszámítása

P Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

M A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

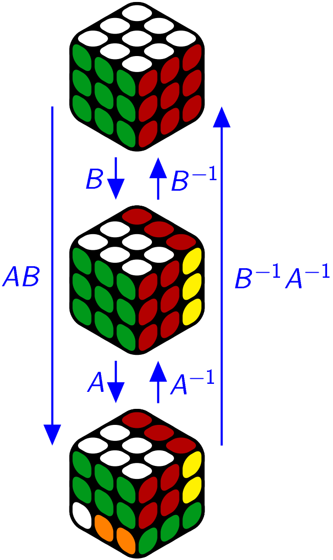
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szorzat inverze



Inverz tulajdonságai

Tétel

$\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-es invertálható mátrixok, $c \neq 0$ skalár, k pozitív egész.

- $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,
- $c\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,
- $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
- $\mathbf{A}^k$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$, definíció szerint ezt értjük $\mathbf{A}^{-k}$-n,
- $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ invertálható, és $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.

Inverz és az egyenletrendszerek

Tétel

$\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix. Ekvivalensek:

- $\mathbf{A}$ invertálható;
- az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es $\mathbf{B}$ mátrixra egyértelműen megoldható;
- az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható;
- a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;
- $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}$;
- $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

Invertálhatóság

Tétel

- $\mathbf{A}$ invertálható;
- $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek;
- $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;
- $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan függetlenek;
- $\mathbf{A}$ sorvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;
- $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

Szingularitás

Tétel

- $\mathbf{A}$ szinguláris (azaz nem invertálható);
- $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők;
- az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb n-nél;
- $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők;
- az $\mathbf{A}$ sorvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb n-nél;
- $\mathbf{A}$ bármely lépcsős alakjának (így redukált lépcsős alakjának is) van zérus sora;
- $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$.

Báziscsere

T $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa. Ekkor $\mathbf{X}_{C\leftarrow B}^{-1} = \mathbf{Y}_{B\leftarrow C}$, azaz $\mathbf{X}_{C\leftarrow B}\mathbf{Y}_{B\leftarrow C} = \mathbf{I}_n$.

P $\mathbb{R}^3$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisában: $\mathbf{i} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_B$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}_B$, $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}_B$.
Írjuk fel $\mathcal{B}$ bázisvektorainak standard bázisbeli koordinátás alakját!

M A $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$ áttérés mátrixa, azaz

$$\mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Az inverz oszlopvektorai adják a $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{E}$-beli alakját.

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\-1 & 3 & -2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Speciális mátrixok

D A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (más néven permutációmátrixnak) hívjuk.

Á Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix.

Á Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, akkor

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}.$$

P
$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Speciális mátrixok

- Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.
- Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.
- Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként: $\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{ferdén szimm.}}$.
- Az $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.

Gyorsszorzás – Strassen-formulák

- Legyen **A**, **B** és **C** is 2×2-es. A $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & \qquad c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})
\end{aligned}
$$

- A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (n^3 szorzás, $n^3 - n^2$ összeadás), ennek blokkmátrixokra rekurzívan $cn^{\log_2 7} \le cn^{2.81}$.
- $cn^{2.376}$ (Coppersmith és Winograd, 1990)
- Lebegőpontos számokra numerikusan instabil

LU-felbontás

D $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ LU-felbontás, ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

m nincs mindig: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$

m Invertálható mátrixra egyértelmű, különben nem feltétlenül:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m Mátrixinvertálás LU-felbontással: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, azaz $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

LU memóriahasználata

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1/4} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 3.50 \end{bmatrix}$$

PLU-felbontás

D $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$, $\mathbf{P}$ permutáló.

m nem csak négyzet alakúakra értelmezhető

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

m Egyenletrendszer megoldása PLU-val: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \iff \mathbf{LUx} = \mathbf{Pb} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ és $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

PLU

$$
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}
\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3\\2\\1\\4 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3\\2\\1\\4 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} 3\\2\\1\\4 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3\\2\\4\\1 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3\\2\\4\\1 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
$$