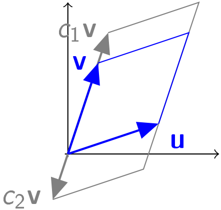
3. előadás: Determinánsok

Wettl Ferenc

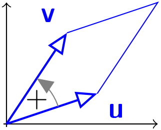
2016. március 1.

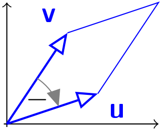
Parallelogramma előjeles területe

Á $f(c\mathbf{u},\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u},\mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u},c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u},\mathbf{v})$

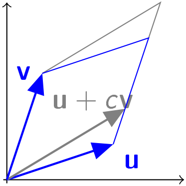


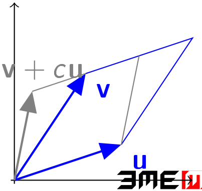
Á $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v},\mathbf{u})$





Á $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+c\mathbf{v},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}+c\mathbf{u})$





Definíció

D Determináns az a négyzetes mátrixokon értelmezett és det-tel jelölt skalár értékű függvény, amely

D1. értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,

D2. értéke -1-szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,

D3. értéke nem változik a hozzáadás elemi sorművelete közben,

D4. az egységmátrixhoz 1-et rendel.

m *D2* elhagyható

m (sor)vektorok függvényeként is definiálható:

$$\det(\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),$$

Zérus determináns

Á Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánsa 0.

Á Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánsa 0.

T Ekvivalens állítások:

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők,
3. $\mathbf{A}$ szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

P $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Egyenletrendszerek és determináns

T Ekvivalens állítások:

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer tetszőleges $\mathbf{b}$-re egyértelműen megoldható,
3. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

- Óvatosan: $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad$ és az $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$
- A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk.

A determináns értékének kiszámítása

T Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

m Elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú

P Pascal-háromszög:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Elemi mátrixok determinánsa

- a hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa 1,
- a sorcserével kapotté -1,
- egy sor c-vel való szorzásával kapotté c,
- például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Permutáló mátrix determinánsa

D egy permutáló mátrix két sora inverzióban áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli

P $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ inverzióinak száma például 4.

T A permutáló mátrix aszerint $+1$ vagy -1, hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.

Mátrixműveletek és determináns

Á $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$

T $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

B $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B})$

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k$ az elemi mátrixok szorzatára bontás.

$\rightsquigarrow$ $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\dots\det(\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB})$.

Á $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Á Determináns könnyen számolható a PLU-ból.

Determináns multilineáris függvény

T Aditivitás az i-edik sorban: $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$

Á homogenitás az i-edik sorban a definíció szerint (D1)!

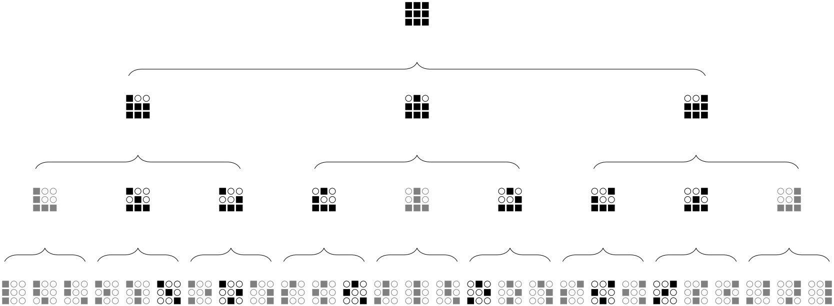
$\rightsquigarrow$ a determináns minden sorában „megtartja a lineáris kombinációt”.

m Ha determinánst, mint sorvektorainak n-változós függvényét tekintjük, akkor a det függvény minden változójában additív és homogén (multilineáris).

Additivitás használata

Mivel $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ ezért

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

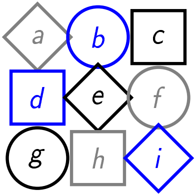


Determináns mint kígyók összege

T Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$ annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az a_{1j_1}, $a_{2j_2}, \dots,$ a_{nj_n} elemekből álló kígyóhoz tartozik. Ekkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján végigfut.



P Sarrus-szabály $n = 2$, $n = 3$ esetén:

K A determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.

Következmények

- A determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. (Gyűrű test helyett).
- Egész számokból álló determináns értéke egész szám.
- Mivel a determináns kifejtésében csak az összeadás és a szorzás művelete szerepel, a determináns folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek.

Kifejtés

D Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$-edrendű determináns $(-1)^{i+j}$-szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsának nevezzük.

Á Ha az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0, A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns, akkor

$$|\mathbf{A}| = a_{ij}A_{ij}.$$

T Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke i-edik sora szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

és j-edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Vandermonde-determináns

D x_1, x_2,... x_n számokhoz tartozó Vandermonde-determináns

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

T $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

A A különböző $x_1, \dots, x_n$ és a tetszőleges $y_1, \dots, y_n$ számokhoz egyetlen olyan legföljebb $n-1$-edfokú f polinom létezik, melyre $f(x_i) = y_i$.

Cramer-szabály

J $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}]$.

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, és ekkor

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

B $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{a}_{*i}$, így

$$\begin{aligned}
\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}] \\
&= [\mathbf{Ae}_{*1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*,i-1} \ \mathbf{Ax} \ \mathbf{Ae}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*n}] \\
&= [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}] \\
&= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

Inverz mátrix elemei

T $[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}$.

K $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[A_{ij}]^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}$.

K $\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$ (szinguláris mátrixra is jó).

K Az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz létezik.

K Egy n-ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.

K Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1 ($\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$).

Blokkmátrixok determinánsa

T $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{D}|.$

T Legyen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok. Ekkor

Ha $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$.

Ha $|\mathbf{D}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{D}|$.

B Trükk

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$