

# Lineáris leképezés

Wetl Ferenc

2016. március 22.

- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pszeudo inverz

- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pszeudoinvert

# A mátrixleképezés fogalma

**D**  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$

**D** képtér:  $\text{Im}(A) = \mathcal{O}(A)$ , magtér:  $\text{Ker}(A) = \mathcal{N}(A)$

**P**  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ .

**M** Az  $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$  vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_3 x_2 + a_2 x_3 \\ a_3 x_1 & -a_1 x_3 \\ -a_2 x_1 + a_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Műveletek mátrixleképezések között

$$\tilde{A} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$\tilde{A} \quad c\mathbf{A} = \mathbf{C} \iff c\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

$$\tilde{A} \quad \mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \iff \mathbf{X} \circ \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$$

$$\tilde{A} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \iff \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

# Mátrixleképezések tulajdonságai

$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  egy tetszőleges mátrixleképezés,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ :

Á  $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$ , ( $A$  megőrzi a lineáris kombinációt)

Á  $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$ , (a leképezés homogén)

$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ , (a leképezés additív)

Á  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Á Tetszőleges altér képe altér.

Á Tetszőleges affin altér képe affin altér.

# Lineáris leképezés

**D** Legyen  $\mathcal{V}$  és  $\mathcal{W}$  két  $\mathbb{F}$  test fölötti vektortér. Azt mondjuk, hogy az  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  leképezés **lineáris**, ha homogén és additív,

**lineáris transzformáció**, ha  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ .

**P** deriválás:  $D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} : f \mapsto D(f) = f'$

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és}$$

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

**P** integrálás:

$$\int_0^1 cf = c \int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f + g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$

**P** Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés.

# Vektortérből vektortérbe képző lineáris leképezések

## T Ekvivalens állítások:

- $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  lineáris (homogén és additív).
- Tetszőleges  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ ,  $c, d \in \mathbb{F}$  esetén

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$

- Tetszőleges  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$  és  $c \in \mathbb{F}$  esetén

$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$

- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{F}$

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \dots + c_kA\mathbf{x}_k.$$



Lineáris  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  leképezések

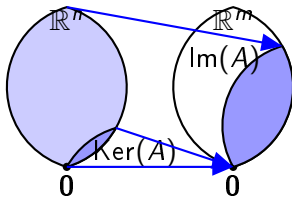
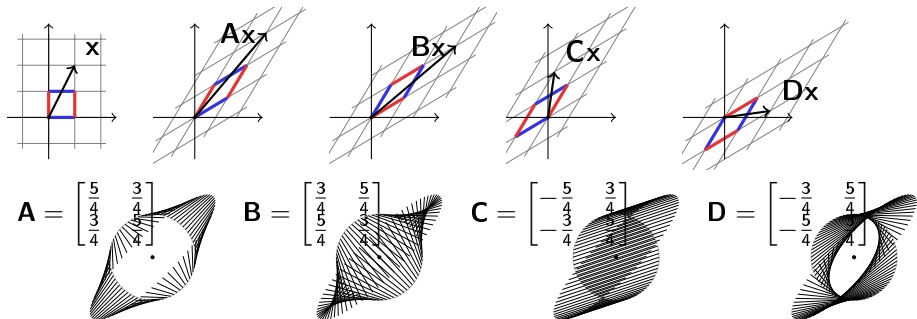
**T**  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  egy tetszőleges függvény. Az  $A$  pontosan akkor lineáris, ha létezik egy olyan  $\mathbf{A}_{m \times n}$  mátrix, hogy az  $A$  függvény megegyezik az  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$  leképezéssel. Ekkor az  $\mathbf{e}_i$  standard egységvektorokkal

$$\mathbf{A} = [\mathbf{Ae}_1 | \mathbf{Ae}_2 | \dots | \mathbf{Ae}_n],$$

**B**

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\mathbf{Ae}_1 + x_2\mathbf{Ae}_2 + \dots + x_n\mathbf{Ae}_n \\ &= [\mathbf{Ae}_1 \quad \mathbf{Ae}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Ae}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

## A mátrixleképezés hatásának szemléltetései



## Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

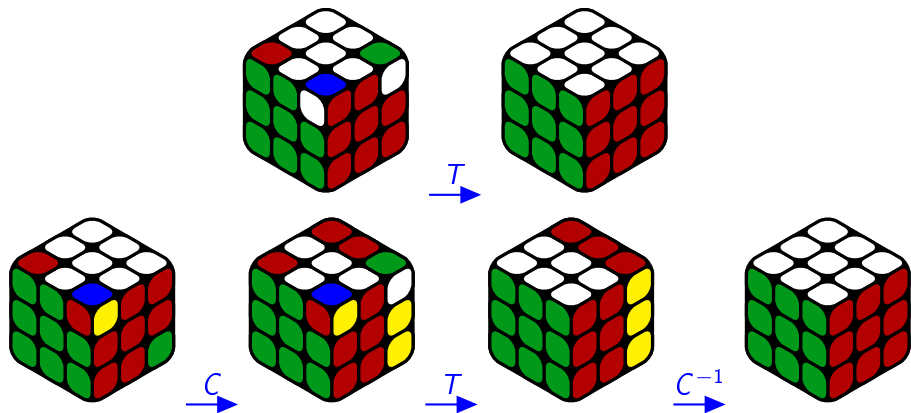
$$\begin{array}{ccc}
 [x]_B & \xrightarrow{L_B} & [Lx]_B \\
 \uparrow C_{B \leftarrow A} & & \uparrow C_{B \leftarrow A} \\
 [x]_A & \xrightarrow{L_A} & [Lx]_A
 \end{array}$$

$$L_B C_{B \leftarrow A} = C_{B \leftarrow A} L_A$$

$$\begin{array}{ccc}
 [x]_B & \xrightarrow{L_B} & [Lx]_B \\
 \uparrow C_{B \leftarrow A} & C_{A \leftarrow B} = & \downarrow C_{B \leftarrow A}^{-1} \\
 [x]_A & \xrightarrow{L_A} & [Lx]_A
 \end{array}$$

$$L_A = C_{A \leftarrow B} L_B C_{B \leftarrow A} = C_{B \leftarrow A}^{-1} L_B C_{B \leftarrow A}$$

## Hasonlóság



D Az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix **hasonló** a  $B$  mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható  $C$  mátrix, hogy  $B = C^{-1}AC$ . Jelölés:  $A \sim B$ .

# Hasonlóság

- T Hasonló mátrixok hatása** Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.
- B**  $\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}$ .
- T Hasonlóságra invariáns tulajdonságok** Ha  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  hasonló mátrixok, azaz  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ , akkor
- 1  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ ,
  - 2  $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$ ,
  - 3  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ ,
  - 4  $\text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{B})$ .

- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pszeudo inverz

## Vektor-vektor függvények differenciálhatósága

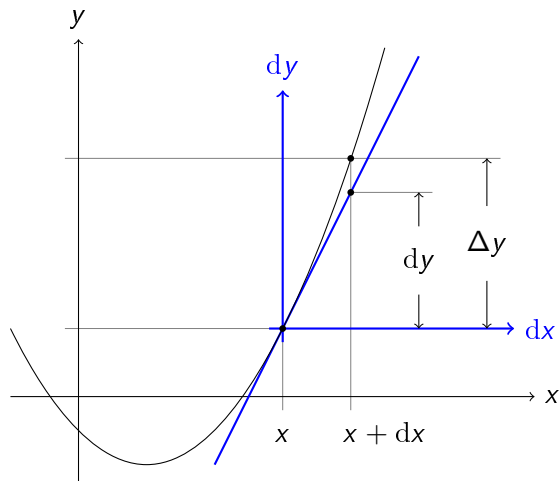
$$\text{m } D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0.$$

**D** Azt mondjuk, hogy az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény differenciálható az  $x$  helyen, ha létezik olyan  $D_{f,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - D_{f,x}h}{|h|} = 0.$$

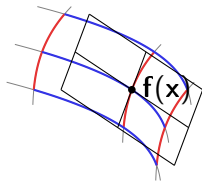
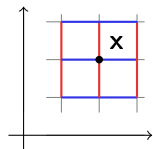
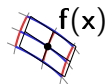
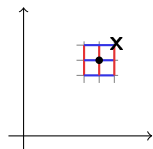
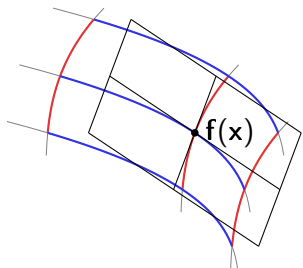
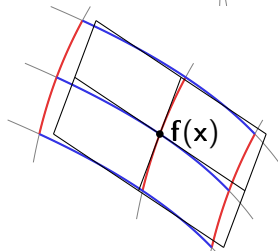
A  $D_{f,x}$  leképezést az  $f$  függvény  $x$  ponthoz tartozó **deriváltleképezésének** nevezzük.

## Derivált





## Derivált

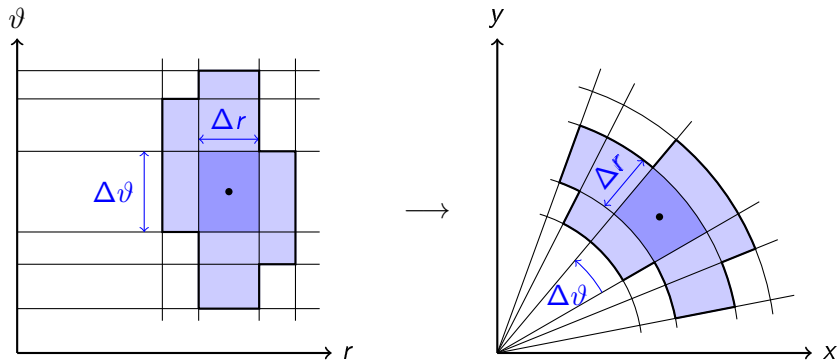

 $zoom=1.50$ 

 $zoom=3.75$ 


## Jacobi-mátrix

**T (Jacobi-mátrix)** Ha az  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \dots, f_m)$  függvény differenciálható az  $\mathbf{x}$  helyen, akkor a lineáris  $D_{\mathbf{f}, \mathbf{x}}$  deriváltleképezés mátrixa a következő, ún. **Jacobi-mátrix**:

$$D_{\mathbf{f}, \mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

## Jacobi-determináns és az integrál transzformációja



## Függvények kompozíciójának deriváltja

**T (Lánkszabály)** Legyen  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  két függvény. Ha  $\mathbf{g}$  differenciálható az  $\mathbf{x}$  helyen, és  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  helyen, akkor  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  differenciálható az  $\mathbf{x}$  helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa:

$$D_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}, \mathbf{x}} = D_{\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g}, \mathbf{x}}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}, \mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{D}_{\mathbf{g}, \mathbf{x}}.$$

- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pszeudo inverz

# Forgatás

**Á** Forgatás 2D-ben:  $[A_i \ A_j] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

**Á** Forgatás tengely körül 3D-ben:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

**T** Rodrigues-formula: az  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  egységvektor egyenese körül  $\alpha$  szöggel:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{e}]_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{e}\mathbf{e}^T - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

**T** Kvaterniókkal:  $\mathbf{q} = \cos \frac{\alpha}{2} + (e_1 i + e_2 j + e_3 k) \sin \frac{\alpha}{2}$  a forgatást jellemző kvaternió, a  $(v_1, v_2, v_3)$ -hoz tartozó kvaternió  $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ . Az elforgatott:  $\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$ , ahol  $\mathbf{q}^{-1} = \cos \frac{\alpha}{2} - (e_1 i + e_2 j + e_3 k) \sin \frac{\alpha}{2}$

**m** számolás kvaterniókkal:  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = k, \dots$  szorzás:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{u})(\mathbf{b} + \mathbf{v}) = \mathbf{ab} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{av} + \mathbf{bu} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

## Merőleges vetítés és tükrözés

- Á Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa  $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b} \mathbf{b}^T$  ( $\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathbf{e}^T$ ).
- Á Síkra való merőleges vetítés mátrixa  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T$ .
- Á Síkbeli tükrözés mátrixa az  $x$ -tengellyel  $\alpha/2$  szöget bezáró egyenesre:
 
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$
- Á Síkra való tükrözés mátrixa  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n} \mathbf{n}^T$ .

## Eltolás

Á 2D:  $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$  a  $z = 1$  egyenletű síkban:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

mátrixa

$$\mathbf{T} = T[\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Á 3D:  $(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$  eltolás:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$



- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pszeudo inverz

## Alterek direkt összege

- D**  $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$  és  $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$  két tetszőleges altér. Azt mondjuk, hogy  $\mathcal{W}$  a  $\mathcal{V}$  **kiegészítő altere**, vagy **komplementer altér**, ha

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U},$$

és azt mondjuk, hogy  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  és  $\mathcal{W}$  alterek **direkt összege**, amit  $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$  jelöl.

- T** Ekvivalens állítások:

- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$  és  $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U}$ , azaz  $\mathcal{V}$  és  $\mathcal{W}$  kiegészítő alterek,
- $\mathcal{U}$  minden vektora egyértelműen áll elő egy  $\mathcal{V}$ - és egy  $\mathcal{W}$ -beli vektor összegeként,
- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$  és  $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = n$ .

- P** ha  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , akkor  $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \mathbb{R}^m$ .

## Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

**T** Ha  $\mathcal{W}$  az  $\mathbb{R}^n$  egy altere, és az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopvektorai a  $\mathcal{W}$  egy bázisát alkotják ( $\mathbf{A}$  teljes oszloprangú), akkor a  $\mathcal{W}$  alterre való merőleges vetítés, azaz a  $\text{proj}_{\mathcal{W}}$  leképezés mátrixa  $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ .

**B** Legyen a  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  vektor  $\mathcal{W}$ -re eső merőleges vetülete  $\mathbf{w}$ .

$\mathbf{A}$  oszloptere  $\mathcal{W}$ , ezért létezik olyan  $\mathbf{x}$  vektor, hogy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$ .

$\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathbf{A})$ , így  $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ , tehát  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  benne van  $\mathbf{A}^T$  nullterében.

Eszerint  $\mathbf{A}^T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ , azaz  $\mathbf{A}^T(\mathbf{v} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$ , innen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}.$$

Az  $\mathbf{A}$  mátrix teljes oszloprangú, így  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  invertálható, azaz  $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v}$ , amiből  $\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v}$ .

## Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa?

**T** Egy  $\mathbf{P}$  mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2$ .

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^T = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A} \left( (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \right)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}.$$

$\Leftarrow$  Tegyük fel, hogy  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2$ .

Megmutatjuk, hogy  $\mathbf{P}$  az  $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re való merőleges vetítés mátrixa.

Ehhez elég megmutatnunk, hogy az  $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$  vektor merőleges  $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re bármely  $\mathbf{x}$  vektor esetén.

A  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  feltétel miatt  $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , tehát  $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$ , de  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ , így  $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^T)$ .

Ez épp azt jelenti, hogy  $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$  merőleges  $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re, és ezt akartuk belátni.

## Altértől való távolság

**D**  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  altér.  $\mathbf{x}$ -nek a  $\mathcal{W}$  altértől való távolságán a  $\mathcal{W}$  altér  $\mathbf{x}$ -hez legközelebbi  $\mathbf{w}$  vektorának tőle való távolságát értjük.

**T** **Legjobb közelítés tétele:** Az  $\mathbf{x}$  vektornak egyetlen  $\mathcal{W}$ -beli legjobb  $\hat{\mathbf{x}}$  közelítése van, nevezetesen  $\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$ .

**B**  $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) + (\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$ .

első kifejezés  $\mathcal{W}^\perp$ , a második  $\mathcal{W}$  eleme!

$$(\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) \perp (\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$$

$$\text{Pithagorász: } |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2 + |\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

$$\rightsquigarrow |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2$$

egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha  $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$

**K**  $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ .

## Altértől való távolság

- P** Bontsuk fel az  $\mathbf{x} = (8, 4, 2, 1)$  vektort  $\mathcal{W} = \text{span}((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$ -be eső és  $\mathcal{W}$ -re merőleges vektorok összegére.
- M** A  $\mathcal{W}$ -re való merőleges vetítés mátrixa  $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T$ , ahol  $\mathbf{W}$  két oszlopa a megadott két bázisvektor:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = \mathbf{Px} = (8, 1, -1, 0)$  és  $\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = (0, 3, 3, 1)$ .

## Egyenletrendszer optimális megoldása

- D** Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  optimális megoldásain az  $\mathbf{Ax} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$  megoldásait értjük.
- T** Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival (normálegyenlet-rendszer). Ezek közül egyetlen egy esik az  $\mathbf{A}$  mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

## Lineáris és polinomiális regresszió

- T** Az  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) párokhoz tartozó,  $y = \hat{a} + \hat{b}x$  egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző  $x_i$  érték.

- B** Megoldandó:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$



# Vetítés

- D**  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ , így bármely  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  egyértelműen előáll  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$  alakban, ahol  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ . A  $\mathbf{v}$  vektor az  $\mathbf{u}$  vektornak a  $\mathcal{V}$  altérre  $\mathcal{W}$  mentén való (vele párhuzamosan vett) **vetülete**.
- D** Ez lineáris transzformáció, **vetítésnek** vagy **projekciónak** nevezzük.
- m** minden  $P$  vetítés az  $\text{Im } P$ -re  $\text{Ker } P$  mentén való vetítés.
- Á** Mátixa:  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{V}$  bázisa  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ ,  $\mathcal{W}$  bázisa  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ .
- Legyen

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V} | \mathbf{W}].$$

Mivel  $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) és  $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$  ( $j = 1, 2, \dots, n - r$ ), ezért a  $P$  leképezés  $\mathbf{P}$  mátrixára

$$\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{P}[\mathbf{V} | \mathbf{W}] = [\mathbf{P}\mathbf{V} | \mathbf{P}\mathbf{W}] = [\mathbf{V} | \mathbf{0}].$$

$\mathbf{U}$  invertálható, ezért

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V} | \mathbf{0}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V} | \mathbf{0}][\mathbf{V} | \mathbf{W}]^{-1}.$$

# Vetítés

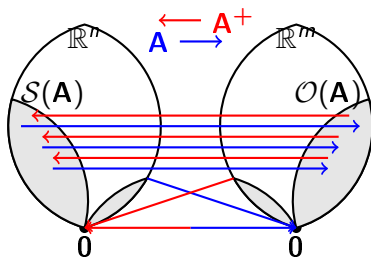
**T** A projekció tulajdonságai: Legyen  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  egy projekció.

1.  $\mathbb{R}^n$ -nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa  $\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .
2.  $I - P$  is projekció:  $\text{Ker}(I - P) = \text{Im } P$ ,  $\text{Im}(I - P) = \text{Ker } P$ ,
3.  $r(P) = \text{trace}(\mathbf{P})$ .

- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pseudo inverz

# A pszéudoinvert fogalma

$\hat{A}$  A sortér és az oszloptér közt létezik természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés ( $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyetlen sortérbe eső megoldása).



$\mathbf{D}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pszéudoinvertén vagy Moore–Penrose-féle pszéudoinvertén azt az  $\mathbf{A}^+$ -szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

- a sortér minden  $\mathbf{x}$  vektorára  $\mathbf{A}^+(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$ , továbbá
- az oszloptérre merőleges minden  $\mathbf{z}$  vektorra  $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ .

## Néhány pszeudo inverz

$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ , ha  $\mathbf{A}$  invertálható,

$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{O}_{m \times n}^+ = \mathbf{O}_{n \times m}$ ,

$\tilde{\mathbf{A}} [a]^+ = [1/a]$ , ha  $a \neq 0$ , és  $[0]^+ = [0]$ ,

$\tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$ ,

$\tilde{\mathbf{A}}$  ha  $a_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), akkor

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \mathbf{0} \\ \hline & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]_{m \times n}^+ = \left[ \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \mathbf{0} \\ \hline & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]_{n \times m}$$

## A pszudo inverz kiszámítása

**T** Ha a valós  $\mathbf{A}$  teljes oszloprangú, akkor  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ ,  
 ha teljes sorrangú, akkor  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ .

Legyen  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{C}$ , ahol  $\mathbf{B}$  egy teljes oszloprangú,  $\mathbf{C}$  egy teljes sorrangú mátrix (ld. bázisfelbontás). Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+ \mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T = \mathbf{C}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{B}^T.$$

**B** Ha  $\mathbf{A}$  teljes oszloprangú, akkor  $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A})$ , és  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  invertálható:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ , vagyis  $\mathbf{A}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$ , akkor  $\mathbf{A}^+ \mathbf{z} = \mathbf{0}$ :  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

Ha  $\mathbf{A}$  teljes sorrangú, akkor  $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$ :  $\forall \mathbf{y}$ -ra  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  konzisztens.

Jelölje  $\hat{\mathbf{x}}$  az egyetlen sortérbe eső megoldást, így minden más  $\mathbf{x}$  megoldásra  $\text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ .  $\mathbf{A}^+$ -ra fenn kell álljon  $\mathbf{A}^+ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$ :

$$\text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \right) (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}. \quad \exists \text{ME} \text{ [WJ]}$$

## A pseudoinverz tulajdonságai

**T Moore–Penrose-tétel:** A valós  $\mathbf{A}$  mátrixnak  $\mathbf{X}$  pontosan akkor pseudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a) \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b) \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c) (\mathbf{AX})^T = \mathbf{AX}, \quad d) (\mathbf{XA})^T = \mathbf{XA}.$$

**K** Tetszőleges  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mátrix esetén

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \quad \text{és} \quad \mathbf{AA}^+ = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}.$$

Tehát  $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$  az  $\mathbb{R}^n$  teret merőlegesen vetíti  $\mathbf{A}$  sorterére, míg  $\mathbf{AA}^+$  az  $\mathbb{R}^m$  teret merőlegesen vetíti  $\mathbf{A}$  oszlopterére.

## A pseudoinvert és a min. absz. értékű opt. megoldás

**T** Legyen  $\mathbf{A}$  egy valós mátrix. Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszernek az  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$  a minimális abszolút értékű optimális megoldása.

**P** Határozzuk meg a minimális abszolút értékű optimális megoldását!

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

**M** Az egyenletrendszer nem oldható meg:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A pseudoinvertét használva a minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$