

Ortogonalizáció

Wetl Ferenc

2016-03-22

- 1 Ortonormált bázis
- 2 Ortogonális mátrix
- 3 Ortogonalizáció
- 4 QR-felbontás
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

- 1 Ortonormált bázis
- 2 Ortogonális mátrix
- 3 Ortogonalizáció
- 4 QR-felbontás
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

Ortogonalis és ortonormált bázis

- D** OR (ortogonalis rendszer, lehet köztük zérusvektor),
ONR (ortonormált rendszer)
- T** Ha a nullvektortól különböző $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor függetlenek is.
- B** Tekintsük a $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ egyenletet.
Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát \mathbf{a}_i -vel ($i = 1, 2, \dots, k$):

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_i$$

$$c_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 0.$$

Mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \neq 0$, ezért $c_i = 0$, és ez igaz minden i -re.

Ortogonalis és ortonormált bázis

T Legjobb közelítés ONB esetén Adva van a \mathcal{V} vektortérben egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormált rendszer által kifeszített \mathcal{A} altér, valamint egy \mathbf{v} vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \quad (1)$$

vektor az \mathcal{A} altér \mathbf{v} -hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B Megmutatjuk, hogy az (1) szerinti pont van legközelebb \mathbf{v} -hez:

$$(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 = \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \right)^2 = \mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2.$$

\mathbf{v} és az altér egy tetszőleges \mathbf{u} vektorának távolságnégyzete:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 = \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{e}_i \right)^2 = \mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k c_i^2.$$

Ortogonalis és ortonormált bázis

A különbségük pozitív, tehát valóban $\hat{\mathbf{v}}$ van \mathbf{v} -hez legközelebb:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 - (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 \\
 &= \left(\mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - \left(\mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k (c_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ebből a legjobb közelítés tétele szerint kapjuk, hogy $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

- 1 Ortonormált bázis
- 2 **Ortogonalis mátrix**
- 3 Ortogonalizáció
- 4 QR-felbontás
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

Ortogonalis mátrixok

- D** Egy valós négyzetes mátrix **ortogonalis**, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy négyzetes legyen, **szemiortogonalis** mátrixról beszélünk.
- P** A forgatás, tükrözés mátrixa, és minden permutációmátrix ortogonalis.
- T** Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor \mathbf{Q} szemiortogonalis $\iff \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ ($m \leq n$ esetén $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$)
- B** sorvektorszor oszlopvektor
- T** Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:
- \mathbf{Q} oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
 - $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
 - $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.
 - $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$.
 - \mathbf{Q} sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
- Á** $|\det(\mathbf{Q})| = 1$, $O(n)$ és $SO(n)$ zárt a szorzásra és invertálásra nézve.

Ortogonalizáció

T **Ortogonalizációhoz tartozó mátrixleképezés** Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

a) Q ortogonalizáció.

b) $|Qx| = |x|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

c) $Qx \cdot Qy = x \cdot y$ minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B a) \Rightarrow b): Ha Q ortogonalizáció, akkor $Q^T Q = I$, így tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|Qx|^2 = Qx \cdot Qx = (Qx)^T (Qx) = x^T Q^T Q x = x^T x = |x|^2$.

b) \Rightarrow c): A skalárszorzás abszolút értékkel való kifejezéséből:

$$\begin{aligned} Qx \cdot Qy &= \frac{1}{4} (|Qx + Qy|^2 - |Qx - Qy|^2) = \frac{1}{4} (|Q(x + y)|^2 - |Q(x - y)|^2) \\ &= \frac{1}{4} (|x + y|^2 - |x - y|^2) = x \cdot y \end{aligned}$$

c) \Rightarrow a): A Q mátrix i -edik oszlopa $q_i = Qe_i$

$$q_i \cdot q_j = Qe_i \cdot Qe_j = e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonalis transzformációi

- T Minden $O(2)$ -be eső ortogonalis mátrix vagy egy α szögű forgatás, vagy egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa, azaz

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

- T A harmadrendű 1 determinánsú ortogonalis transzformációk a forgatások, a -1 determinánsúak, azaz $O(3) - SO(3)$ elemei egy pontra való tükrözés és egy forgatás egymás utáni alkalmazásával megkaphatók.

Givens-forgatás

D Givens-forgatás: forgatás egy síkban, minden más helyben marad:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \dots & -\sin \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin \alpha & \dots & \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

m Egy tetsz. \mathbf{x} vektor olyan vektorba forgatható, melynek j -edik koordinátája 0. Az i -edik és j -edik sorokat és oszlopokat kiemelve

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \alpha = \frac{a}{r}, \sin \alpha = -\frac{b}{r}$$

Householder-tükrözés

- D** Householder-tükrözés: Egy adott $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözést **Householder-tükrözésnek** nevezzük. Mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T$$

- T** Ha \mathbf{a} és \mathbf{b} két különböző, de azonos hosszúságú vektor \mathbb{R}^n -ben, akkor az $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\perp$ hipersíkra való H-tükrözés \mathbf{a} -t és \mathbf{b} -t fölcseréli.

- B** Megmutatjuk, hogy $\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{a}$, ahol

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b})} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T.$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{b}^T \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}.$$

$$\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b})} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}$$

$$= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}} (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b}.$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

- 1 Ortonormált bázis
- 2 Ortogonális mátrix
- 3 Ortogonalizáció**
- 4 QR-felbontás
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

T Gram–Schmidt-ortogonalizáció Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén

$$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i). \quad (2)$$

Az ortogonális \mathcal{V} rendszerből a vektorok normálásával kapott

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} \right\}$$

rendszer ortonormált.

Gram-Schmidt-ortogonalizáció

B $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \rightsquigarrow \text{span}(\mathbf{a}_1) = \text{span}(\mathbf{v}_1)$.

A $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teljesüléséhez:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\mathbf{a}_2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \right) \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

E vektor nem 0-vektor, hisz $\mathbf{v}_2 = 0$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{a}_1$ lenne, azaz \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 nem lenne független.

$\rightsquigarrow \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \dots$

kiszámoljuk az \mathbf{a}_{i+1} vektornak a $\text{span}\left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}\right)$ altérre merőleges összetevőjét, ez lesz \mathbf{v}_{i+1}

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{v}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben \mathcal{A} nem volna független. \mathbf{v}_{i+1} kifejezhető az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és \mathbf{a}_{i+1} kifejezhető az $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

- P** Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.
- M** Először keressünk egy ortogonális bázist:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(3, -1, 3, -1) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 = (6, 2, 2, -2) - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2) \end{aligned}$$

Végül az ortonormált bázis:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

- 1 Ortonormált bázis
- 2 Ortogonális mátrix
- 3 Ortogonalizáció
- 4 QR-felbontás**
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

A QR-felbontás

- D** Legyen \mathbf{A} egy teljes oszlopangú mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást **QR-felbontásnak** vagy **redukált QR-felbontásnak** nevezzük, ha \mathbf{Q} az \mathbf{A} -val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és \mathbf{R} négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.
- T** Teljes oszlopangú valós mátrix QR-felbontása létezik és egyértelmű. A \mathbf{Q} mátrixot ortonormált oszlopvektorok hozzávételével kiegészíthetjük egy ortogonális mátrixszá, az \mathbf{R} mátrixot pedig zérussorok hozzávételével egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrixszá, akkor e mátrixok szorzata is \mathbf{A} , ugyanis

$$\mathbf{A} = [\mathbf{Q} \quad \hat{\mathbf{Q}}] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}$$

Ezt nevezzük **teljes QR-felbontásnak**.

- B** QR létezése a Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárásból:
 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ teljes oszloprangú ($k \leq n$), a \mathbf{q} -vektorokra: $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ értékre, ezért léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{a}_1 = r_{11}\mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_k = r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k.$$

- Ezt mátrixszorzat-alakba írva épp a kívánt felbontást kapjuk:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k] = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_k] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{v}_i|$, tehát $r_{ii} > 0$.

\mathbf{R} kiszámítása: $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{QR} = \mathbf{I}_k \mathbf{R} = \mathbf{R}$, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$. 

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

P QR-felbontását Givens-forgatásokkal: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

M $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos \alpha = 4/5$, $\sin \alpha = -3/5$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1 \mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1 \qquad \mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ \hline & & \mathbf{H}_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right] \qquad \mathbf{Q}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \mathbf{H}_3 \end{array} \right]$$

P QR-felbontását Householder-módszerrel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

M $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ trafóhoz $\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$(4, 3) \mapsto (5, 0)$ transzformációh $\mathbf{a} = (4, 3) - (5, 0) = (-1, 3)$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen \mathbf{A} egy teljes oszloprangú $m \times n$ -es valós mátrix, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és \mathbf{b} egy \mathbb{R}^m -beli vektor.

Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, ami megkapható az $\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B Optimális megoldás a normálegyenletből:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{b} & \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után} \\ (\mathbf{QR})^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^T\mathbf{b} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} & \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} & \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^T)^{-1} \text{ mátrixszal} \\ \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{b}. \end{aligned}$$

- 1 Ortonormált bázis
- 2 Ortogonális mátrix
- 3 Ortogonalizáció
- 4 QR-felbontás
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

Komplex vektorok skaláris szorzata

? komplex számok skaláris szorzata

$$(1, i) \cdot (1, i) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(i, i) \cdot (i, i) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

■ lehetőségek:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n.$$

D Az \mathbf{A} komplex mátrix **adjungáltján** (vagy **Hermite-féle transzponáltján**) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az \mathbf{A} adjungáltját \mathbf{A}^* , vagy Hermite neve után \mathbf{A}^H jelöli, tehát $\mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}}^T$.

D $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n = \mathbf{z}^H \mathbf{w}$.

Adjungált és a skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyenek \mathbf{A} és \mathbf{B} komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor

- $(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H$,
- $(c\mathbf{A})^H = \bar{c}\mathbf{A}^H$
- $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$.

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

D A komplex skaláris szorzás segítségével – a valós esethez hasonlóan – definiálható a komplex vektorok távolsága és szöge, és így a merőlegessége is.

Önadjungált – Hermite-féle – mátrixok

D \mathbf{A} önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

P Melyik önadjungált?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

M az első kettő

Unitér mátrixok

D Egy komplex négyzetes \mathbf{U} mátrix **unitér**, ha $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Á Az alábbiak ekvivalensek:

- $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$,
- \mathbf{U} oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- \mathbf{U} sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
- $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

- 1 Ortonormált bázis
- 2 Ortogonális mátrix
- 3 Ortogonalizáció
- 4 QR-felbontás
- 5 Komplex skaláris szorzás
- 6 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

M A Fourier-sorok komplex alakja, és részletösszegei (diszkrét Fourier-összeg):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit} \quad g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit} = c_0 + c_1 e^{it} + c_1 e^{2it} + \dots + c_{N-1} e^{(N-1)it}$$

Á A $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \mapsto (g(0), g(\frac{2\pi}{N}), \dots, g(\frac{2(N-1)\pi}{N}))$ leképezés lineáris, és mátrixa $[e^{\frac{2\pi i}{N} mn}]$ ($0 \leq m, n < N$).

P A $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ jelöléssel

$$y_0 = c_0 + c_1 e^{i0} + c_2 e^{2i0} = c_0 + c_1 + c_2$$

$$y_1 = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{3}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2$$

$$y_2 = c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi i}{3}} + c_2 e^{\frac{8\pi i}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^4$$

a $(c_0, c_1, c_2) \mapsto (y_0, y_1, y_2)$ leképezés lineáris, mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Általánosan:

$$y_0 = c_0 + c_1 e^{i0} + c_2 e^{2i0} + \dots + c_{N-1} e^{(N-1)i0} = c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1}$$

$$y_1 = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{N}} + \dots + c_{N-1} e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}}$$

⋮

$$y_{N-1} = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i(N-1)}{N}} + \dots + c_{N-1} e^{\frac{2\pi i(N-1)^2}{N}}$$

Az $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$ jelöléssel mátrixszorzat-alakban

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{N-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(N-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \varepsilon^{2(N-1)} & \varepsilon^{3(N-1)} & \dots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

D Fourier-mátrixok: az $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$, $\omega = \bar{\varepsilon} = e^{-2\pi i/N}$ jelölésekkel:

$$\Phi_{N,\varepsilon} = \mathbf{V}_N(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \dots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{N,\omega} = \mathbf{V}_N(1, \omega, \dots, \omega^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

T A Fourier-mátrixok tulajdonságai:

- Bármelyik Fourier-mátrix k -adik és $N - k$ -adik sora egymás konjugáltja, páros N esetén pedig az $N/2$ -edik sorvektor $(1, -1, 1, -1, \dots)$.
- $\Phi_{N,\omega} = \overline{\Phi_{N,\varepsilon}} = \Phi_{N,\varepsilon}^H$ és $\Phi_{N,\varepsilon} = \overline{\Phi_{N,\omega}} = \Phi_{N,\omega}^H$
- $\Phi_{N,\varepsilon} \Phi_{N,\omega} = M I_N$, így $\Phi_{N,\varepsilon}$ és $\Phi_{N,\omega}$ invertálható,

$$\Phi_{N,\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{N} \Phi_{N,\omega}, \quad \Phi_{N,\omega}^{-1} = \frac{1}{N} \Phi_{N,\varepsilon},$$

továbbá $\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_{N,\varepsilon}$ és $\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_{N,\omega}$ unitér.

M A továbbiakban

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit}$$

függvényből indulunk ki, a megadott helyek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N részre osztó $2k\pi/N$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) pontok. A

$F_N : (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \mapsto (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ $\mathbf{F}_N = \Phi_{N,\omega}$, amelyre a továbbiakban az

D Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) Az

$$F_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{F}_N \mathbf{x}$$

P Az F_1 , F_2 , F_4 és F_8 mátrixok:

$$F_1 = [1], \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix},$$

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

T A DFT tulajdonságai

- Konstans vektor képe impulzusvektor (melynek a nulladikat kivéve mindegyik koordinátája 0), és fordítva, konkrétan

$$F_N(c, c, \dots, c) = (Nc, 0, \dots, 0), \quad F_N(c, 0, \dots, 0) = (c, c, \dots, c).$$

ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges konstans.

- Ha \mathbf{x} valós vektor, akkor $X_{N-k} = \overline{X}_k$.
- Az F_N transzformáció invertálható, inverze (IDFT) többféle felírásban:

$$\mathbf{x} = F_N^{-1} \mathbf{X} = \frac{1}{N} \Phi_{N,\varepsilon} \mathbf{X}, \quad x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \varepsilon^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

M DFT kiszámításához N^2 művelet

M két fele akkora méretű Fourier-transzformációból megkapható:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2\pi i}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{\frac{-2\pi i}{N} 2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{\frac{-2\pi i}{N} (2n+1)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{\frac{-2\pi i}{N/2} nk} + e^{\frac{-2\pi i}{N} k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{\frac{-2\pi i}{N/2} nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \omega_{N/2}^{nk} = E_k + \omega_N^k O_k.
 \end{aligned}$$

E_k és O_k $N/2$ szerint periodikusak $\rightsquigarrow E_{k+N/2} = E_k$, $O_{k+N/2} = O_k$

Innen $k < N/2$ esetén $X_k = E_k + \omega_N^k O_k$, $X_{k+N/2} = E_k - \omega_N^k O_k$.

A műveletigény $\frac{3}{2} N \log N$.

```

function FFT(x)
   $N \leftarrow \text{dim}(\mathbf{x})$ 
  X legyen  $N$ -dimenziós vektor
  if  $N = 1$  then
    |  $X_0 \leftarrow x_0$ 
  else
    |  $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x}$  páros indexű elemei
    |  $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{x}$  páratlan indexű elemei
    |  $\mathbf{Y} \leftarrow \text{FFT}(\mathbf{y})$ 
    |  $\mathbf{Z} \leftarrow \text{FFT}(\mathbf{z})$ 
    | for  $k \leftarrow 0$  to  $N/2 - 1$  do
      | |  $E \leftarrow Y_k$ 
      | |  $O \leftarrow e^{\frac{-2\pi i}{N} k} Z_k$ 
      | |  $X_k \leftarrow E + O$ 
      | |  $X_{k+N/2} \leftarrow E - O$ 
    |
  return X

```

M FFT mátrixszorzat-alakja

$$\mathbf{F}_N = \Delta_N \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_N,$$

$\mathbf{\Pi}_N$ az a permutációs mátrix, mely előre veszi a páros indexű elemeket, Δ_N a „fél” transzformáltakat összeadó, és a páratlan indexűeket egy ω -hatvánnyal beszorzó mátrix.

$$\mathbf{\Pi}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad \Delta_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{D}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{D}_4 \end{bmatrix}$$

A Δ mátrixokban szereplő diagonális mátrixok az egységmátrixok, és az ω hatványait tartalmazó \mathbf{D} mátrixok, ahol

$\mathbf{D}_k = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{k-1})$. Pl.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_8 &= \Delta_8 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \Pi_8 \\ &= \Delta_8 \begin{bmatrix} \Delta_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Pi_4 \end{bmatrix} \Pi_8. \end{aligned}$$

