

Mátrixok sajátosságai

Wetttl Ferenc

2016. március 28.

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 A sajátérték kiszámítása
- 3 Ortogonális és unitér diagonalizálás
- 4 Kvadratikus formák

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 A sajátérték kiszámítása
- 3 Ortogonális és unitér diagonalizálás
- 4 Kvadratikus formák

- D** A λ szám az \mathbf{A} mátrix **sajátértéke**, ha létezik olyan nemnulla \mathbf{x} vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen \mathbf{x} vektorokat az \mathbf{A} mátrix λ sajátértékhez tartozó **sajátvektorainak**, a (λ, \mathbf{x}) párokat pedig az \mathbf{A} **sajátpárjainak** nevezzük.
- Á** A λ -hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ -vel.
- D** ez a **sajátaltér**
- D** **karakterisztikus egyenlet:** $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$
- Á** Ha az n -edrendű \mathbf{A} mátrix sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

Az algebrai és a geometriai multiplicitás

- D** algebrai multiplicitás k , ha λ a karakterisztikus egyenlet k -szoros gyöke
- D** geometriai multiplicitás d , ha a sajátaltér dimenziója d
- T** $1 \leq d \leq k$

Sajátértékek és a mátrix hatványai

- T** Az \mathbf{A} mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.
- B** $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$
- T** Ha λ az \mathbf{A} mátrix egy sajátértéke és \mathbf{x} egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az \mathbf{A}^n mátrixnak és \mathbf{x} egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és \mathbf{A}^n is értelmezve van.
- B** $n = 0$, $n = 1$: trivi, $n > 2$:
- $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k \mathbf{x}$.
- invertálható: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, amiből $\frac{1}{\lambda} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$.
- negatív kitevő: $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$, amiből $\lambda^{-k} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k} \mathbf{x}$.
- T** **Mátrix hatványainak hatása** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(\lambda_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ sajátpárok. Ha

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m \mathbf{v} = c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.$$

Speciális mátrixok sajátértékei


A Legyen \mathbf{A} valós mátrix,

- ha \mathbf{A} szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- ha \mathbf{A} ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- ha \mathbf{A} ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,
- \mathbf{A} pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

B Legyen (λ, \mathbf{x}) egy \mathbf{A} -hoz tartozó saját pár. $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \lambda \mathbf{x} = \lambda |\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x} = \bar{\lambda} |\mathbf{x}|^2$. Legyen $\lambda = a + ib$.

Ha \mathbf{A} szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.

- Ha \mathbf{A} ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.
- \mathbf{A} ortogonális: bármely \mathbf{x} -re $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ha \mathbf{x} sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$
- Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, és λ sajátértéke \mathbf{A} -nak, akkor λ^k sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak, annak viszont csak a 0 sajátértéke, így \mathbf{A} -nak is minden sajátértéke 0.

Az állítás megfordítása a Cayley–Hamilton-tételből következik. 

Speciális komplex mátrixok sajátértékei

T **Speciális komplex mátrixok sajátértékei** Ha az n -edrendű komplex A mátrix


- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
- ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

Hasonlóság

- D** Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció **sajátértéke**, ha létezik olyan nemnulla x vektor, melyre $Lx = \lambda x$. Az ilyen x vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorainak** nevezzük.
- T** Ha $A \sim B$, akkor A és B karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.
- B** $A = C^{-1}BC$:

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= C^{-1}BC - \lambda C^{-1}IC \\ &= C^{-1}(BC - \lambda IC) \\ &= C^{-1}(B - \lambda I)C, \end{aligned}$$

Hasonló mátrixoknak pedig determinánsum és nullterük dimenziója is azonos.

- K** Lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja definiálható 

Diagonalizálhatóság

- D** **A** diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz ($\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$).
- T** **A** diagonalizálható \iff **A**-nak van n lineárisan független sajátvektora.
- B** $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{C}$

$$[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$$

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$$

- D** Sajátfelbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$

Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja

- D** Bal sajátvektor: $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^T$ ($\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$)
- M** $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^T) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}) \rightsquigarrow$ a bal és jobb sajátértékek azonosak
- M** $\mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}$: \mathbf{C}^{-1} sorvektorai \mathbf{A} bal sajátvektorai
- D** Sajátfelbontás diadikus alakja:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^T \end{aligned}$$

Diagonalizálható mátrix polinomja, Cayley–Hamilton-tétel

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

B \mathbf{A} mátrix diagonalizálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$
 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1} \dots$ tetszőleges nemnegatív k egészre
 $\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$.

T **Cayley–Hamilton-tétel:** Ha \mathbf{A} egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $p_{\mathbf{A}}$, akkor $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

M Ha \mathbf{A} diagonalizálható, akkor trivi, ui. ha $p_{\mathbf{A}}$ az \mathbf{A} mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Különböző sajátértékek sajátalterei

- T** Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.
- B** TFH összefüggők, és \mathbf{x}_i a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i -nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}.$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.

Kivonva: $\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1}$,

Mivel az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lineárisan függetlenek,

$c_1 = \dots = c_{i-1} = 0$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, ellentmondás.

- K** Ha az n -edrendű \mathbf{A} mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság

T **Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás** Egy n -edrendű valós vagy komplex négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n .

B ✓

M Egy \mathbb{T} test fölötti n -edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a \mathbb{T}^n tér előáll sajátaltéréinek direkt összegeként.

P geometriai példák

- vetítés egyenesre, síkra, altérre, hipersíkra,
- tükrözés egyenesre, síkra, hipersíkra,
- forgatás egy egyenes körül a térben (nem diagonalizálható).

M Blokkosításból:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_k], \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^T \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ felbontás:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^T + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \mathbf{y}_k^T \\ &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyre:

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

- T** Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása: A $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú \mathbf{A} mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- \mathbf{P}_i az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

B $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T$) $\rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}, \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O} \quad (i \neq j) \rightsquigarrow$$

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}.$$

$$\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i, \text{ azaz } \mathbf{P}_i \text{ vetítés.}$$

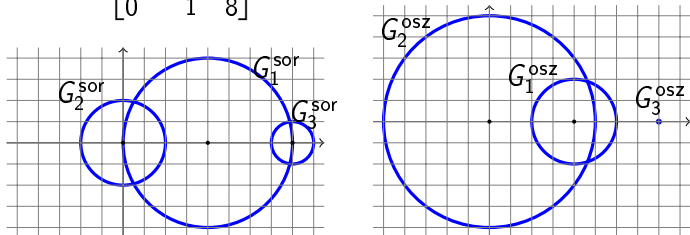
- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 A sajátérték kiszámítása
- 3 Ortogonális és unitér diagonalizálás
- 4 Kvadratikus formák

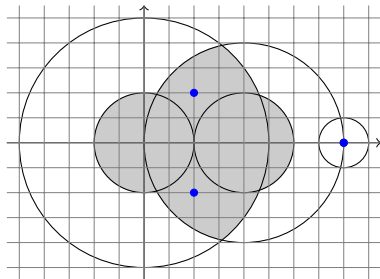
Gersgorin-körök

- D Gersgorin-körök:** Az $n \times n$ -es valós vagy komplex \mathbf{A} mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középpű, és r_i^{SOR} sugarú G_i^{SOR} , illetve r_i^{OSZ} sugarú G_i^{OSZ} köröket értjük ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol

$$r_i^{\text{SOR}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad r_i^{\text{OSZ}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|. \quad (1)$$

- P** Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:





T A valós vagy komplex $n \times n$ -es mátrix.


- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{SOR}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{OSZ}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{SOR}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{OSZ}})$,
- Ha a G_i^{SOR} körök egy k -elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n - k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B (λ, \mathbf{x}) saját pár, $\max_j x_j = 1$, tehát $|x_j| \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A} \mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = r_i^{\text{SOR}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1 - r) \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is. (Hisz Gersgorin-körök nem tartalmazzák az origót) 

Hatványmódszer

- D** Egy sajátérték **szigorúan domináns**, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (**szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár**)
- M** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_j, \mathbf{v}_j)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$, (λ_1 valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne). Legyen $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{A}^k \mathbf{v}_m \\ &= c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \lambda_m^k \mathbf{v}_m. \end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k -val való osztás után $k \rightarrow \infty$ esetén

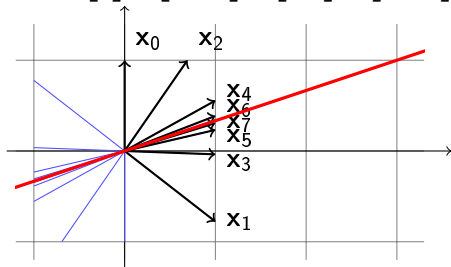
$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{A}^k \mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_m \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1,$$

Tehát ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k \mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan \mathbf{x}_0 vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} \rightarrow \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k \mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 A sajátérték kiszámítása
- 3 Ortogonalis és unitér diagonalizálás
- 4 Kvadratikus formák

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása

- D** Az \mathbf{A} mátrix **ortogonálisan diagonalizálható**, ha találunk egy ortogonális \mathbf{Q} és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.
- Á** Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.
- B** (λ, \mathbf{x}) és (μ, \mathbf{y}) két saját pár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x})^T \mathbf{y} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mu \mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^T \mathbf{y}).$$

- T** **Valós spektráltétel:** A valós \mathbf{A} mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.
- B** $(\Rightarrow) \mathbf{A}^T = (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{Q}^T)^T \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T = \mathbf{A}$.
 (\Leftarrow) teljes indukció, $n = 1$ OK.

\mathbf{A} szimmetrikus, így minden sajátértéke valós. (λ, \mathbf{u}_1) egy saját pár, \mathbf{u}_1 -et kiegészítjük ONB-sá: $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{A}\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_n] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} [\lambda \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_n] = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}, \end{aligned}$$

Másrészt $\mathbf{B}^T = (\mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0)^T = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}$,

azaz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$, és \mathbf{A}_1 is szimmetrikus!

$\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow$ sajátértékeik megegyeznek $\rightsquigarrow \mathbf{A}_1$ minden sajátértéke \mathbf{A} -nak is sajátértéke \rightsquigarrow (teljes indukció miatt) $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^T$.

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$ ortogonális

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Schur-felbontás

- T** Minden valós négyzetes \mathbf{A} mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy \mathbf{T} felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan \mathbf{Q} ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^T$.
- T** Minden komplex négyzetes \mathbf{A} mátrix unitéren hasonló egy \mathbf{T} felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan \mathbf{U} unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^H$.
- B** Mint az előbb:

$$\mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Indukció: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{Q}_1^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Hessenberg-mátrixok

D Felső Hessenberg-mátrix: a subdiagonális alatt minden elem nulla.

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

T Minden valós négyzetes \mathbf{A} mátrix, ortogonálisan hasonló egy \mathbf{H} felső Hessenberg-mátrixhoz, azaz van olyan \mathbf{Q} ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QHQ}^T$.

Mátrixok unitér diagonalizálása

- D** \mathbf{A} unitéren diagonalizálható, ha van olyan \mathbf{U} unitér és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H$).
- D** Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normális, ha $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$.
- M** Normális az összes komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér, valamint az összes valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix.

Vannak mások is

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix normális, mert

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.

B $(\Rightarrow) \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H \mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^H (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H \mathbf{U}^H \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H \mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^H \mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H \mathbf{U}^H = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^H = \mathbf{A}\mathbf{A}^H. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Schur: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H$. Ha \mathbf{A} normális, \mathbf{T} is:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^H \mathbf{T} &= (\mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{U})^H (\mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U}\mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{A}^H \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U} = (\mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^H \mathbf{A}\mathbf{U})^H = \mathbf{T}\mathbf{T}^H. \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}; \text{ ezért } [\mathbf{T}^H \mathbf{T}]_{11} = |t_{11}|^2,$$

$[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, amiből $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$.

Hasonlóan a $[\mathbf{T}^H \mathbf{T}]_{22}$ és a $[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]_{22}$ elemekből $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$,

stb. Tehát \mathbf{T} diagonális.

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 A sajátérték kiszámítása
- 3 Ortogonális és unitér diagonalizálás
- 4 Kvadratikus formák

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja

- P** Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja: Írjuk fel az $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!
- M** A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva

$$\begin{aligned}
 & x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 \\
 = & x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\
 = & x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2 \\
 = & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Főtengetyítétel

T Főtengetyítétel: \mathbf{A} egy n -edrendű valós szimmetrikus mátrix, $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ ortogonális diagonalizálása. Az $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus formát az $\mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}$ kvadratikus formába transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az \mathbf{A} mátrix sajátértékei. Választható \mathbf{Q} úgy, hogy $\det(\mathbf{Q}) = 1$ legyen.

Kvadratikus formák és mátrixok definitisége

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus \mathbf{A} mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

M Tetszőleges \mathbf{A} valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = |\mathbf{A} \mathbf{x}|^2 \geq 0$.

Mátrix sajátértékei és definitisége

- T** A valós szimmetrikus **A** mátrix ($\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus forma) pontosan akkor
- pozitív definit, ha **A** minden sajátértéke pozitív;
 - pozitív szemidefinit, ha **A** minden sajátértéke nemnegatív;
 - negatív definit, ha **A** minden sajátértéke negatív;
 - negatív szemidefinit, ha **A** minden sajátértéke nempozitív;
 - indefinit, ha **A**-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

Főminorok és a definitség

- D** Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix **főminorának** nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, **vezető főminorról** beszélünk, pontosabban a k -adrendű vagy k -edik vezető főminorról.
- T** **Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai** A valós szimmetrikus \mathbf{A} mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor
- pozitív definit, ha \mathbf{A} minden főminora pozitív;
 - pozitív szemidefinit, ha \mathbf{A} minden főminora nemnegatív;
 - pozitív definit, ha \mathbf{A} minden vezető főminora pozitív;
 - negatív definit, ha \mathbf{A} minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.