Jordan-féle normálalak

Wettl Ferenc

2016. április 26.

Invariáns alterek

D Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) invariáns altere, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).

T Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

B $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-ban van $\rightsquigarrow$ $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

$(\Leftarrow)$ $\forall\ \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$

L! $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k \rightsquigarrow$

$$L\mathbf{x} = x_1 L\mathbf{u}_1 + x_2 L\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k L\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Lx}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

- (még megmutathatjuk azt is, hogy e voktorok és képeik közt mi a lineáris kapcsolat:

$$\operatorname{rref}([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz $L\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.)

Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafó két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

m $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^6 &= \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned} .$$

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa.
Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_i &= u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_{n-r} \\ L\mathbf{w}_j &= 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \dots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r} \end{aligned}$$

ahol $i = 1, \dots, r$, $j = r+1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

mátrix hatása a standard bázison:
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után:
$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$
- Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs, viszont

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sorozatot Jordan-láncnak nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Egy tér általánosított sajátvektorokból álló bázisát Jordan-bázisnak nevezzük.

m A Jordan-lánc definíciója korrekt: ha $\mathbf{x}_k$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ vektorok is általánosított sajátvektorok. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4 - x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

- $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O} \leadsto \exists \mathbf{x}_3 : (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$
- $$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\leadsto (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \leadsto x \neq z$, pl $(1, 0, 0)$

$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$

- $\mathbf{A}$ alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, ahol $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3]$ ($\mathbf{X}$ az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4-x)^3$.

M Sajátaltér: $\operatorname{span}((1,0,1),(0,2,3))$
$(\mathbf{C}-4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk),
$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

- $$\mathbf{C}-4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$
  $\rightsquigarrow$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$ megfelel.
- $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2,4,4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól: $\mathbf{x}_1 = (-2,4,4) = -2(1,0,1) + 2(0,2,3)$.)
- $\mathbf{y}_1$ legyen független $\mathbf{x}_1$-től:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2,4,4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1,0,0)$$
$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1,0,1)$$

- $\mathbf{C}$ alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\}$ bázisban
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
- $\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} =$
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

D Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, Jordan-blokknak nevezzük:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

m Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_n$$

m Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis Jordan-láncokból áll.

Jordan-normálalak

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

m minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a $\mathbf{C}$ oszlopvektoraiból áll).

m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontásának nev.

m $\mathbb{F}$ test, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ összes sajátértéke $\mathbb{F}$-beli $\Rightarrow$ a tétel igaz.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Jordan-alak egyértelműsége

T Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

B Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatárázó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

- A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.
- TFH $\mathbf{A}$ minden sajátértéke λ. Pl. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (\lambda - x)^{13}$, és

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^2 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array}$$

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^s=\mathbf{O}$.

  Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos (ha $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\sim\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}$).
- n_i: λ-hoz tartozó i-hosszú Jordan-láncok száma (itt $n_1=2$, $n_2=0$, $n_3=1$, $n_4=2$).
- $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ hatványainak rangjából

$$\begin{aligned} n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\right)=2\\ n_3+2n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\right)=5\\ n_2+2n_3+3n_4 &= \mathrm{r}\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=8\\ n_1+2n_2+3n_3+4n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^0\right)=n=13, \end{aligned}$$

  Ez egyértelműen megoldható.

- Általában

$$\begin{aligned} n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-1}\right) \\ n_{s-1}+2n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right) \\ n_{s-2}+2n_{s-1}+3n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-3}\right) \\ &\ \vdots \\ n_2+2n_3+\dots+(s-1)n_s &= \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \\ n_1+2n_2+\dots+(s-1)n_{s-1}+sn_s &= n. \end{aligned}$$

a jobb oldalon invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú mellékátlójában csupa egyes van $\rightsquigarrow$ a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám (visszahelyettesítéssel mo-ható).

- több különböző sajátérték esetén: ha λ algebrai multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $A - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjához az összes λ-tól különböző sor eggyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n - m(\lambda))$-t ki kell vonni.

$$\begin{aligned}
n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-1}\right) \\
n_{s-1} + 2n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-2}\right) \\
n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-3}\right) \\
&\vdots \\
n_2 + 2n_3 + \cdots + (s-1)n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
n_1 + 2n_2 + \cdots + (s-1)n_{s-1} + sn_s &= m(\lambda)
\end{aligned}$$

QED

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{10\times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$.

A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik.

Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$
\begin{aligned}
n_4 &= 1 \\
n_3 + 2n_4 &= 2 \\
n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 5 \\
n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 10
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
n_4 &= 1 \\
n_3 &= 0 \\
n_2 &= 2 \\
n_1 &= 2
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda & & & & \\
\hline
 & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]
$$

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^5(2-\lambda)^5(1-\lambda)^4$.

$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;
$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

$\lambda = 3$: a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$. A leghosszabb lánc hossza $s = 4$, ugyanis ez a legkisebb s, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^s) = 14 - 5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{aligned} n_4 &= 5 - 14 + 10 = 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 5 - 14 + 11 = 2 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 5 - 14 + 12 = 3 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 0 \\ n_1 &= 1 \end{aligned}$$

- Hasonlóan járunk el a többi sajátértékkel is:

$$\begin{aligned} n_3 &= 5 - 14 + 10 = 1 \\ n_2 + 2n_3 &= 5 - 14 + 12 = 3 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_2 &= 1 \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= 4 - 14 + 11 = 1 \\ n_1 + 2n_2 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_2 &= 1 \\ n_1 &= 2 \end{aligned}$$

- Összefoglalva: $\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3&1&&&&&&&&&&&& \\
&3&1&&&&&&&&&&& \\
&&3&1&&&&&&&&&& \\
&&&3&&&&&&&&&& \\ \hline
&&&&3&&&&&&&&& \\ \hline
&&&&&2&1&&&&&&& \\
&&&&&&2&1&&&&&& \\
&&&&&&&2&&&&&& \\ \hline
&&&&&&&&2&1&&&& \\
&&&&&&&&&2&&&& \\ \hline
&&&&&&&&&&1&1&& \\
&&&&&&&&&&&1&& \\ \hline
&&&&&&&&&&&&1& \\ \hline
&&&&&&&&&&&&&1
\end{array}\right]$

D $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ minimálpolinomja olyan minimális fokszámú $\mu_{\mathbf{A}}$ főpolinom (azaz 1 főegyütthatójú), melyre $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. ($\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció minimálpolinomja hasonlóan)

- $\mu_{\mathbf{I}}(x) = x - 1$ ($\mu_{\mathbf{I}}(\mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$).
- $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, akkor minimálpolinomjaik egyenlőek, ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$ minden p polinomra.
- A minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára (lineáris transzformáció minimálpolinomja megegyezik bármely bázisban fölírt mátrixának minimálpolinomjával).

T $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

a) $\mathbf{A}$-nak pontosan egy $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinomja van.
b) Bármely p polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ pontosan akkor áll fenn, ha p maradék nélkül osztható a $\mu_{\mathbf{A}}$ polinommal.
c) A $\chi_{\mathbf{A}}$ karakterisztikus polinom osztható a $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinommal.
d) $\mathbf{A}$ minden sajátértéke gyöke $\mu_{\mathbf{A}}$-nak.

m Legyen $\mathbf{A}$ nilpotens ($\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$). Ekkor $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^k$.

T $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ spektruma $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$, a λ_i sajátérték algebrai multiplicitása a_i, és $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ_i-hez tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete legyen m_i. Ekkor

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i)^{m_i}.$$