Nemnegatív mátrixok

Wettl Ferenc

2016. április 19.

Mátrixok összehasonlítása

D $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, ha $a_{ij} > b_{ij}$ $\forall$ i és j esetén

pozitív: $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ (nemnegatív: $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$), azaz ha $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geqslant 0$)

Á Néhány észrevétel:

- $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \geqslant 0$ vektorra,
- $\mathbf{A} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra,
- $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{Ay}$.

D A mátrixok pozitivitásának 4 fokát definiáljuk:

A pozitív:	$\forall i,j$	$a_{ij} > 0$
A primitív:	$\exists k\ \forall i,j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$
A irreducibilis:	$\forall i,j\ \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$
A reducibilis:	$\exists i,j\ \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$

ahol $a_{ij}^{(k)} = [\mathbf{A}^k]_{ij}$.

Perron-tétel

T Perron-tétel: pozitív sajátérték és sajátvektor Ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, akkor

1. $r > 0$, ($r = \rho(\mathbf{A})$ a spektrálsugár),
2. r sajátérték egy pozitív sajátvektorral,
3. $\mathbf{A}$-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora.

D $\mathbf{p}$ Perron-vektor és a $\mathbf{q}$ bal Perron-vektor

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = r\mathbf{p},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad \mathbf{q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = r\mathbf{q}^{\mathsf{T}},\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

T Perron-tétel: egyszeres és domináns sajátérték Ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, akkor

1. az r sajátérték algebrai multiplicitása 1,
2. r domináns, azaz minden további λ sajátértékre $|\lambda| < r$.

A Perron-tétel nem áll a nemnegatív mátrixokra

A Perron-tétel pl. ezekre nem áll:

- a $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] \geqslant \mathbf{O}$, mindkét sajátértéke 0, ezért spektrálsugara is 0,
- az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] \geqslant \mathbf{O}$ mátrix spektrálsugara 1, de az 1 kétszeres sajátérték, és több lineárisan független pozitív sajátvektor is tartozik hozzá,
- a $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix sajátértékei 1 és -1, így spektrálsugara ugyancsak 1, de a spektrálkörön több különböző sajátértéke is van,
- az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak nincs pozitív sajátvektora.

Ugyanakkor pl.

- az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{smallmatrix}\right] \geqslant \mathbf{O}$, sajátértékei 2, -1, spektrálsugara 2, ami egyszeres sajátérték, a spektrálkörön ez az egyetlen sajátérték, a hozzá tartozó $(1, 1)$ sajátvektor pozitív, és ennek konstansszorosait kivéve más pozitív sajátvektor nincs, mert a -1-hez tartozó sajátvektor $(1, -2)$.

Mi igaz minden nemnegatív mátrixra

T Perron–Frobenius-tétel – gyenge változat Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, akkor az $r = \varrho(\mathbf{A})$ spektrálsugár sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, melyhez tartozik nemnegatív sajátvektor.

B Alapötlet: $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$

T Collatz–Wielandt-tétel Az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix r spektrálsugarára

$$r = \max_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}}} \min_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x_i \neq 0}} \frac{[\mathbf{Ax}]_i}{x_i}, \text{ másként fogalmazva } r = \max_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}}} \max_{c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{Ax}} c$$

B Indító gondolat: ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, akkor

$$c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{Ax} \quad \rightsquigarrow \quad c\mathbf{q}^T\mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}^T\mathbf{Ax} = r\mathbf{q}^T\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c \leqslant r.$$

Másrészt az $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ vektorra $r\mathbf{p} = \mathbf{Ap} \rightsquigarrow \max c = r$.

Mi igaz minden nemnegatív mátrixra

K Nemnegatív mátrixok spektrálsugarának becslése Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, akkor a spektrálsugár a sorösszegek minimuma és maximuma, illetve az oszlopösszegek minimuma és maximuma közé esik, azaz

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$$
$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right\}$$

K Konstans sorösszeg vagy oszlopösszeg Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, és minden sorösszeg c, akkor a spektrálsugár c. (oszlopösszegre is)

Irreducibilis mátrixok

T Az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix pontosan akkor reducibilis, ha a sorok és oszlopok azonos permutációjával

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Z}$ négyzetes mátrixok (létezik olyan $\mathbf{P}$ permutációmátrix, hogy $\mathbf{PAP}^\mathsf{T}$ a fenti alakú). Pontosan azok a mátrixok irreducibilisek, amelyek nem hozhatók ilyen alakra.

B csak az előjel számít, a nagyság nem.

G irányított gráf: i-edik csúcsból a j-edikbe pontosan akkor fut irányított él, ha $a_{ij} > 0$,

$\mathbf{G}$ szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}$-ból: a pozitív elemeket 1-re cseréljük

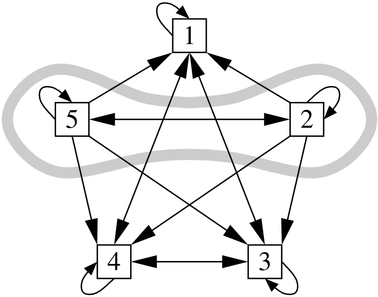
$[\mathbf{G}^k]_{ij}$ eleme pontosan akkor pozitív, ha az i-edik csúcsból vezet k-hosszú irányított út a j-edik csúcsba

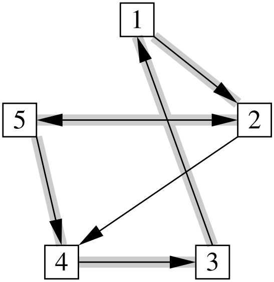
$\mathbf{A}$ pontosan akkor irreducibilis, ha bármely két csúcs között vezet irányított út, azaz ha a gráf erősen összefüggő

Irreducibilis mátrixok

P reducibilis, vagy irreducibilis?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 13 & 14 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 33 & 34 & 0 \\ 41 & 0 & 43 & 44 & 0 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}.$$





Permutáló mátrix

- **A** reducibilis: az első és utolsó sorok és oszlopok cseréje megfelel

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{PAP}^\mathsf{T}=\left[\begin{array}{cc|ccc}55&52&53&54&51\\25&22&23&24&21\\\hline 0&0&33&34&31\\0&0&43&44&41\\0&0&13&14&11\end{array}\right].$$

Más megoldás: az $1\to3\to4\to5\to2\to1$ csere is megteszi:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{PAP}^\mathsf{T}=\left[\begin{array}{cc|ccc}22&25&21&23&24\\52&55&51&53&54\\\hline 0&0&11&13&14\\0&0&31&33&34\\0&0&41&43&44\end{array}\right].$$

- sorok és oszlopok azonos permutációja, nem elemi sorműveletek!

Irreducibilis mátrixok

- Összefoglalás:

A	algebrai feltétel		gráfelméleti feltétel
pozitív:	$\forall i,j$	$a_{ij} > 0$	irányított teljes gráf
primitív:	$\exists k\ \forall i,j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	$\forall$ két csúcs között fut k-hosszú út
irreducibilis:	$\forall i,j\ \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	erősen összefüggő
reducibilis:	$\exists i,j\ \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$	nem erősen összefüggő

Perron–Frobenius-tétel 1.

T Ha az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ irreducibilis, akkor

1. $r > 0$,
2. r sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,
3. $\mathbf{A}$-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,
4. r egyszeres sajátérték.

Primitív és imprimitív mátrixok

m A Perron-tétel állításai közül nem maradt igaz az irreducibilis nemnegatív mátrixokra az, hogy a spektrálkörön csak egyetlen sajátérték van.

T Feltétel mátrix primitivitására Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ irreducibilis és főátlójában van pozitív elem, akkor primitív.

B A gráfon!

Primitív és imprimitív mátrixok

P Döntsük el, hogy melyik mátrix primitív!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0&0&6\\7&0&8\\0&9&0\end{bmatrix}$$

M $\mathbf{A}$ reducibilis $\rightsquigarrow$ nem primitív. (a többi irred.)

$\mathbf{B}$ pozitív $\rightsquigarrow$ primitív.

$\mathbf{C}^3=\mathbf{I}$ $\rightsquigarrow$ nem primitív.

$\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ reducibilis $\rightsquigarrow$ $\mathbf{D}^{2m}$ is $\rightsquigarrow$ $\mathbf{D}$ nem primitív.

Primitív és imprimitív mátrixok

Az $\mathbf{E}$ mátrix irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem, ezért primitív. Az $\mathbf{F}$ primitív, mivel

$$\mathbf{F}^5 = \begin{bmatrix} 27216 & 20412 & 31104 \\ 36288 & 54432 & 57348 \\ 23814 & 46656 & 54432 \end{bmatrix} > \mathbf{O},$$

Egyszerűbben: $0 \mapsto 0$, pozitív $\mapsto 1$, szorzás $\mapsto$ AND, összeadás $\mapsto$ OR:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sőt, csak négyzetreemelésekkel még gyorsabb:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{F}^8 > \mathbf{O}$, tehát $\mathbf{F}$ primitív.

Perron–Frobenius-tétel 2.

T Perron–Frobenius-tétel – sajátértékek a spektrálkörön Ha az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ irreducibilis, akkor

1. a spektrálkör határára eső sajátértékek 1 multiplicitásúak, és $\{r, r\varepsilon, \ldots, r\varepsilon^{k-1}\}$ alakba írhatók, ahol $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$,
2. $\mathbf{A}$ pontosan akkor primitív, ha a spektrálkörén csak egy sajátérték van (azaz minden $\lambda \neq r$ sajátértékére $|\lambda| < r$),
3. $\mathbf{A}$ pontosan akkor primitív, ha létezik a $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k$ határérték. Ekkor e határérték megegyezik az $\mathbf{A}$ spektrálfelbontásában szereplő, az r sajátértékhez tartozó vetítő mátrixszal, azaz

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} > \mathbf{0},$$

   ahol $\mathbf{p}$ a Perron-vektor, $\mathbf{q}$ a bal Perron vektor.
4. Ha $\mathbf{A}$ imprimitív, akkor

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{I} + (\mathbf{A}/r) + (\mathbf{A}/r)^2 + \ldots + (\mathbf{A}/r)^{k-1}}{k} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} > \mathbf{0}.$$

D A nemnegatív vektort sztochasztikusnak nevezzük, ha koordinátáinak összege 1 (azaz 1-normája 1). A nemnegatív $\mathbf{A}$ mátrix sztochasztikus, ha minden oszlopvektora sztochasztikus. (Sorsztochasztikus, ha minden sora).

- Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{v}$ sztochasztikus, akkor $\mathbf{u} = \mathbf{Av}$ is:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j = 1.$$

- sztochasztikus mátrixok szorzata sztochasztikus mátrix.
- Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor sztochasztikus, ha $\mathbf{A}$-nak az $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ vektor bal sajátvektora 1 sajátértékkel.

T Ha $\mathbf{S}$ sztochasztikus mátrix, akkor

1. $\lambda = 1$ egy sajátérték,
2. a spektrálsugara 1, és
3. ha $\mathbf{S}$ primitív, akkor $\lambda \neq 1$ esetén $|\lambda| < 1$.

Duplán sztochasztikus mátrixok

- **D** Duplán sztochasztikus, ha sor- és oszlopsztochasztikus is
- Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata is duplán sztochasztikus.
- Minden permutációmátrix duplán sztochasztikus.
- Ha $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ unitér, akkor az $\mathbf{A} = \left[|u_{ij}|^2\right]$ mátrix duplán sztochasztikus, ugyanis $\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 = 1$.
- **T** Frobenius–Kőnig-tétel: Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixban pontosan akkor eleme minden kígyónak a 0, ha $\mathbf{A}$ részmátrixai közt van olyan $s \times t$ méretű zérusmátrix, hogy $s + t = n + 1$.
- **K** Minden duplán sztochasztikus mátrixban van legalább egy kígyó, melynek minden eleme pozitív.
- **T** Birkhoff-tétel: Minden n-edrendű duplán sztochasztikus mátrix előáll permutációmátrixok konvex lineáris kombinációjaként, azaz a duplán sztochasztikus mátrixok az $\mathbb{R}^{n\times n}$ térben olyan konvex poliédert alkotnak, melynek csúcsai a permutációmátrixok. ($\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{P}_i$, ahol $c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 1$, $c_i \geqslant 0$.)