Mátrixfüggvények

Wettl Ferenc

2016. április 28.

m Ha $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k &= \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k\right) \\ &= \operatorname{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)). \end{aligned}$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ mátrixfüggvény is. Fölhasználva a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad |x| < 1$$

hatványsort kapjuk, hogy

$$\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \dots,$$

m Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvett értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.

m A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

Á Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1},$$

- Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x-\lambda)^m + \ldots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)\mathbf{N} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{N}^{n-1} \qquad (1)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek. Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

Spektrumon definiált függvény

D Legyen az **A** mátrix spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i. Azt mondjuk, hogy f definiálva van az **A** spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \; i = 1, \ldots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az **A** spektrumán.

m Minden függvény, mely **C** minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és n_i jelöli a $\mathbf{J}_i$ blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C} f(\mathbf{J}) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \operatorname{diag}(f(\mathbf{J}_1), \dots, f(\mathbf{J}_k)) \mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \tag{2}$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

M **A** karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2,$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2e^4}\begin{bmatrix} e^2+1 & 2e^2-2 & e^2-1 \\ e^2-1 & 2e^2 & e^2-1 \\ 1-e^2 & 2-2e^2 & 3-e^2 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

M $\chi(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+5)$. A 2-höz tartozó s.v.: $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7, 0, 1)$ $\rightsquigarrow$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

A 2-höz tartozó másik általánosított sajátvektor:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{3}, 0)$ $\rightsquigarrow$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$\mathbf{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}} = \mathbf{C}e^{3\mathbf{J}}\mathbf{C}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

Á Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak.

B Ha $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja $\mathbf{A}$-t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az $\mathbf{A}$ spektrumán.

Ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát h annullálja $\mathbf{A}$-t, így $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$.

Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

D Legyen $\mathbf{A}$ minimálpolinomja $\mu_{\mathbf{A}}$, és tegyük fel, hogy az f függvény definiálva van $\mathbf{A}$ spektrumán. Ekkor $f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$, ahol p az a polinom, melynek foka kisebb $\mu_{\mathbf{A}}$ fokánál, és amely eleget tesz a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \; i = 1, \ldots, k \qquad (3)$$

feltételeknek, ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli.

- A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük Hermite-polinomnak, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{s} \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \left(\frac{f(y)}{\prod_{k \neq i} (y - \lambda_k)} \right)^{(j)} (\lambda_i) \frac{(x-\lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j} \right).$$

- Ha $\mathbf{A}$-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i-re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \qquad (4)$$

Ha pedig $\mathbf{A}$-nak csak egyetlen sajátértéke λ, melynek n az algebrai multiplicitása, azaz $s = 1$, $m_1 = n$, akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x-\lambda)^j}{j!}.$$

- Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nem mindig tudjuk könnyen meghatározni, például ha a mátrixnak csak a sajátértékeit ismerjük, de a legnagyobb Jordan-blokk méretét nem. A korábbiak szerint bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (3) feltételeket.
- Nézzük az $f(x) = x^3$ függvény helyettesítési értékét a $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixban. Ugyan f polinom, de mivel $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2$, azaz a minimálpolinom kisebb fokú, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely $\mathbf{A}$-ban azonos értéket ad. E polinom az $x^3 : \mu_{\mathbf{A}}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x-2)^2(x+4) + (12x-16)$, azaz a maradék $12x-16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

m Keressük meg az $f(x)=x^3$ Hermite-féle interpolációs polinomját

$$\begin{aligned} f(2)=8=p(2)&=2a+b \\ f'(2)=12=p'(2)&=a. \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a=12, b=-16.$$

■ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}}=?$

$\mu_{\mathbf{A}}(x)=(x-2)^3 \rightsquigarrow$ Hermite-polinom: $p(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{aligned} e^x\big|_2 &= e^2 = p(2) = 4a+2b+c \\ (e^x)'\big|_2 &= e^2 = p'(2) = 4a+b \qquad \rightsquigarrow \; a=e^2/2, b=-e^2, c=e^2, \rightsquigarrow \\ (e^x)''\big|_2 &= e^2 = p''(2) = 2a. \end{aligned}$$

$$e^{\mathbf{A}}=p(\mathbf{A})=\frac{e^2}{2}\mathbf{A}^2-e^2\mathbf{A}+e^2\mathbf{I}$$

$$=\frac{e^2}{2}\begin{bmatrix}4&4&1\\0&4&4\\0&0&4\end{bmatrix}-e^2\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}+e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=e^2\begin{bmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Exponenciális függvény Hermite-polinommal

P Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (x+2)(x+4)^2$, Jordan-alakja $\operatorname{diag}(-2,-4,-4)$, a minimálpolinom $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x+2)(x+4) = x^2+6x+8$.
olyan elsőfokú $p(x) = ax+b$ alakú polinomot keresünk, melyre

$$\mathrm{e}^{-2} = p(-2) = -2a+b$$
$$\mathrm{e}^{-4} = p(-4) = -4a+b.$$

Innen $a = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4})$, $b = 2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}$, így

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = a\mathbf{A} + b\mathbf{I} = \frac{1}{2\mathrm{e}^4}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & 2\mathrm{e}^2-2 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2-1 \\ 1-\mathrm{e}^2 & 2-2\mathrm{e}^2 & 3-\mathrm{e}^2 \end{bmatrix}.$$

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = ?$

M $\chi(x) = (4-x)^3$, $\mu(x) = (4-x)^2$ (korábbi feladatból)

Keresünk egy $p(x) = ax + b$ polinomot, melyre

$$\begin{aligned} \exp(4) &= \mathrm{e}^4 = p(4) = 4a + b \\ \exp'(4) &= \mathrm{e}^4 = p'(4) = a \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a = \mathrm{e}^4,\ b = -3\mathrm{e}^4$$

- Tehát

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathrm{e}^4\mathbf{A} - 3\mathrm{e}^4\mathbf{I} = \mathrm{e}^4 \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

A definíciók ekvivalenciája

T A mátrixfüggvény kiszámítására adott fenti két definíció ekvivalens.

B A „Hermite"-definíció szerint $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ és bármely más polinom is megadja $f(\mathbf{A})$-t, ha kielégíti a (3) feltételeket.

Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, akkor $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{CJC}^{-1}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$, ezért elég a Jordan-alakokra ellenőrizni az ekvivalenciát.

A „Jordan"-definícióban f-nek épp azok a deriváltjai szerepelnek azokban a sajátértékekben kiértékelve, amelyek a (3) feltételekben is szerepelnek. Így elég csak azt ellenőrizni, hogy egy Jordan-blokk Hermite-polinomja megegyezik-e a „Jordan"-definícióban szereplővel. Ezt a polinom Taylor-polinomjára fölírt (1) képlet igazolja.