

Mátrixegyenletek

Wettl Ferenc

2016. május 10.

1 Mátrixmanipulációk

2 Lineáris mátrixegyenletek

1 Mátrixmanipulációk

2 Lineáris mátrixegyenletek

vec-függvény

D ha $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_n]$, akkor

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, akkor $\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Kronecker-szorzat

- D** Legyen \mathbf{A} egy $m \times n$ -es, \mathbf{B} egy $p \times q$ -as mátrix. **Kronecker-szorzatukon** (vagy más néven **tenzorszorzatukon**) azt az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ -vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

A Kronecker-szorzat és a vec tulajdonságai

T Adva van $\mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{B}_{m \times n}$, $\mathbf{C}_{p \times q}$, $\mathbf{D}_{r \times s}$,

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}$,
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \otimes \mathbf{D} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$,
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}^T$,

T Adva van $\mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{B}_{p \times q}$, $\mathbf{X}_{n \times p}$

- 1 $\text{vec}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X})$, $\text{vec}(\mathbf{XB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n) \text{vec}(\mathbf{X})$,
- 2 $\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X})$,
- 3 $\text{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XB}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n) \text{vec}(\mathbf{X})$.

B 2

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{AXB}]_{*j} &= \mathbf{AXB}_{*j} = \sum_{i=1}^p b_{ij} (\mathbf{AX})_{*i} = \sum_{i=1}^p (b_{ij} \mathbf{A}) \mathbf{X}_{*i} \\
 &= [b_{1j} \mathbf{A} \mid \dots \mid b_{nj} \mathbf{A}] \text{vec}(\mathbf{X}) \\
 &= [\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}]_{j*} \text{vec}(\mathbf{X})
 \end{aligned}$$

Műveletek hipermátrixokkal

- D** $L!$ $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}^+$, S egy tetszőleges nem üres halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z} \dots$). d -edrendű (vagy d -dimenziós) $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d$ -típusú **hipermátrixnak** nevezzük az

$$\mathbf{A} : \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{1, \dots, n_d\} \rightarrow S$$

alakú leképezést. Az $\mathbf{A}(i_1, i_2, \dots, i_d)$ elemet $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$ -vel jelöljük (egy d -dimenziós táblázat egy eleme):

$$\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \dots i_d}]_{i_1, i_2, \dots, i_d=1}^{n_1, n_2, \dots, n_d} \text{ vagy egyszerűbben } \mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \dots i_d}].$$

Ha $n_1 = n_2 = \dots = n_d = n$, akkor a **hiper-kockamátrixról** beszélünk.

- J** Az S elemeiből képzett összes $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d$ -típusú hipermátrixok halmazát

$$\mathcal{S}^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$$

jelöli.

- m** A másodrendű hipermátrixok egybeesnek a mátrixokkal.
- P** A 3-adrendű $4 \times 2 \times 3$ -típusú hipermátrixok általános alakja

$$\begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{113} & a_{123} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{213} & a_{223} \\ a_{311} & a_{321} & a_{312} & a_{322} & a_{313} & a_{323} \\ a_{411} & a_{421} & a_{412} & a_{422} & a_{413} & a_{423} \end{bmatrix}$$

- D** Két azonos típusú hipermátrix összeadása és egy hipermátrix skalárral való szorzása elemenként:

$$\begin{aligned} [a_{i_1 i_2 \dots i_d}] + [b_{i_1 i_2 \dots i_d}] &:= [a_{i_1 i_2 \dots i_d} + b_{i_1 i_2 \dots i_d}], \\ c[a_{i_1 i_2 \dots i_d}] &:= [ca_{i_1 i_2 \dots i_d}], \end{aligned}$$

Hiper-mátrix transzponáltja

- D** Legyen π az $\{1, 2, \dots, d\}$ halmaz egy permutációja. A d -edrendű $\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \dots i_d}] \in S^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$ hiper-mátrix **π -transzponáltján** az

$$\mathbf{A}^\pi = [a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(d)}}] \in S^{n_{\pi(1)} \times n_{\pi(2)} \times \dots \times n_{\pi(d)}}$$

hiper-mátrixot értjük. Egy $\mathbf{A} \in S^{n \times n \times \dots \times n}$ hiper-kockamátrix **szimmetrikus**, ha minden π permutációra $\mathbf{A}^\pi = \mathbf{A}$, és **ferdén szimmetrikus**, ha $\mathbf{A}^\pi = \text{sgn}(\pi)\mathbf{A}$, ahol $\text{sgn}(\pi) = -1$, ha a π páratlan permutáció, és 1 , ha páros.

- P** A $2 \times 2 \times 2$ -es hiper-mátrixok és szimmetrikus hiper-mátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & b & c \\ b & c & c & d \end{array} \right].$$

P A $3 \times 3 \times 3$ -as hipermátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & g & h & e & h & i \\ c & e & f & e & h & i & f & i & j \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in S$ nem feltétlenül különböző elemek.

Hipermátrixok külső szorzata

- D** Legyen $\mathbf{A} \in S^{n_1 \times \dots \times n_d}$ egy d -edrendű és $\mathbf{B} \in S^{m_1 \times \dots \times m_e}$ egy e -edrendű hipermátrix. **Külső szorzatukon** azt a $(d + e)$ -edrendű

$$\mathbf{C} = [c_{i_1 \dots i_d j_1 \dots j_e}]_{i_1, \dots, i_d, j_1, \dots, j_e=1}^{n_1, \dots, n_d, m_1, \dots, m_e} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in S^{n_1 \times \dots \times n_d \times m_1 \times \dots \times m_e}$$

hipermátrixot értjük, melyre

$$c_{i_1 \dots i_d j_1 \dots j_e} = a_{i_1 \dots i_d} b_{j_1 \dots j_e}.$$

P

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

1 Mátrixmanipulációk

2 Lineáris mátrixegyenletek

Lineáris mátrixegyenletek típusai

D Lineáris mátrixegyenletnek nevezzük a

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{B}_i = \mathbf{C}, \quad (1)$$

ahol $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{p \times m}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{C}^{n \times q}$.

■ **Sylvester-egyenlet:** $\mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (2)$$

■ **Általánosított Sylvester-egyenlet:** az (1) spec. esete $k = 2$ -re

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X} \mathbf{B}_2 = \mathbf{C}, \quad (3)$$

■ **Ljapunov-egyenlet** a Sylvester-egyenlet speciális esete akkor, ha $m = n$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^H$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^H$, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^H = \mathbf{C}.$$

A lineáris mátrixegyenlet megoldása

T Az (1) lineáris mátrixegyenlet megoldható az

$$\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{B}_i^T \otimes \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{C}) \quad (5)$$

lineáris egyenletrendszer segítségével, ahol az együtthatómátrix $(pq) \times (mn)$ -es méretű és $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X})$.

B $\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X})$

m A gyakorlatban ennél gyorsabb algoritmusok léteznek, melyek az \mathbf{A}_i és \mathbf{B}_i mátrixokat háromszög alakra vagy Hessenberg-alakra hozzák...

Lineáris mátrixegyenlet megoldása

- P** Oldjuk meg az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ és az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{D}$ Sylvester-egyenleteket, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- M** Mindkét egyenlet bal oldala $\mathbf{AXI} + \mathbf{IXB}$ alakú, így a megoldást nyújtó (5) egyenlet együtthatómátrixa

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & | & 2 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & | & 2 & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Így az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

- Innen az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{D}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right], \quad \text{első két sor: ellentmondásos.}$$

A Sylvester-egyenlet egyértelmű megoldhatósága

T A (2) Sylvester-egyenlet megoldását nyújtó

$$\left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m \right) \text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{C})$$

egyenletrendszer $(mn) \times (mn)$ -es együtthatómátrixa pontosan akkor invertálható, ha \mathbf{A} -nak és $-\mathbf{B}$ -nek nincs közös sajátértéke.

B A bizonyításhoz elég megmutatni, hogy ha

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad \sigma(\mathbf{B}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\},$$

akkor

$$\sigma\left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m\right) = \{\lambda_i + \mu_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}.$$

- Ekkor az $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m$ mátrixnak a 0 nem lesz sajátértéke, azaz invertálható lesz, ha \mathbf{A} és $-\mathbf{B}$ spektrumának metszete üres.

- TFH \mathbf{A} és \mathbf{B}^T Jordan-felbontása

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}_A\mathbf{C}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}^T = \mathbf{D}\mathbf{J}_B\mathbf{D}^{-1}.$$

- $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m$

$$= \mathbf{D}\mathbf{I}_n\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}\mathbf{J}_A\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{J}_B\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}\mathbf{I}_m\mathbf{C}^{-1}$$

$$= (\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_A)(\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) + (\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{J}_B \otimes \mathbf{I}_m)(\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1})$$

$$= (\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B \otimes \mathbf{I}_m)(\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})^{-1}.$$

Mivel az $\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B \otimes \mathbf{I}_m$ mátrix felsőháromszög-mátrix, így spektruma a főátló elemeiből áll, azok pedig a $\{\lambda_i + \mu_j\}$ multihalmazt adják.

Eszerint a hozzá hasonló $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m$ mátrixnak ugyanez a spektruma.

- P** Megoldható-e egyértelműen az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ mátrixegyenlet az előző feladatbeli $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixok esetén?
- M** A tétel szerinti spektrumok

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{1, -1\}, \quad \sigma(-\mathbf{B}) = \{-1, -2\},$$

melyek metszete nem üres, így az $I_2 \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes I_2$ mátrix nem invertálható, tehát az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ mátrixegyenletnek vagy végtelen sok megoldása van, vagy ellentmondásos!