1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket $\mathbb{R}$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert $\mathbb{F}_2$, illetve $\mathbb{F}_3$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Tekintsük $\mathbb{R}^4$ azon $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ elemeit, melyekre

$$a)\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\ , \quad b)\ x_1x_3 = x_2x_4\ , \quad c)\ x_3 \geq x_4\ ,$$

$$d)\ \begin{aligned} 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 10x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \quad e)\ x_1 + 3x_2 = 4\ , \quad f)\ \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

A fenti részhalmazok közül melyek alkotnak alteret $\mathbb{R}^4$ - ben?

4. Az alábbi $\mathbb{R}^3$ - beli vektorok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?
$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{c})$, illetve $\mathrm{Span}(\mathbf{b},\mathbf{c})$ alterei közül melyikben van benne a $\mathbf{d}$ vektor? Keressen bázist a $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$ alterekben, és írja fel a kimaradó vektor e bázisbeli koordinátás alakját is!

5. Határozza meg az alábbi mátrixok nullterét, sorterét, oszlopterét, ezen alterek egy bázisát, valamint számítsa ki a mátrixok rangját.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, majd ezt felhasználva az összes megoldását!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$