1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket $\mathbb{R}$ felett.

(a)
$$\begin{aligned} x+2y+-z &= 2\\ 3x-y+2z &= 7\\ x-z &= -2\\ 2x+y+z &= 7 \end{aligned}$$

(b)
$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+z &= 11\\ x-y-2z &= -7\\ 3x+2y-z &= 2 \end{aligned}\;\right|\;\begin{matrix} 11\\ -7\\ 4 \end{matrix}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 14\\ 2x_1+6x_2+10x_3+6x_4+2x_5 &= 28\\ x_1+5x_2+9x_3+2x_4+3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert $\mathbb{F}_2$, illetve $\mathbb{F}_3$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-x_4 &= 1\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= 0\\ x_1-x_2-x_3+x_4 &= 1\\ x_2+x_3+x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli vektorok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}1\\3\\6\\2\end{pmatrix}$$

Mennyi az általuk kifeszített altér dimenziója? Ajd meg egy bázis ebben az altérben. Mik lesznek a vektorok koordinátái ebben a bázisban? Adj meg olyan maximálisan független vektorrendszert, amiben **d** benne van.

4. Az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli vektorok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Az $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{c})$, illetve $\mathrm{Span}(\mathbf{b},\mathbf{c})$ alterek közül melyikben tartalmazza **d**-t? Keressen bázist a $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})$, $\mathrm{Span}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$ alterekben, és írja fel a kimaradó vektor e bázisbeli koordinátás alakját is!

5. Határozza meg az alábbi mátrixok nullterét, sorterét, oszlopterét, ezen alterek egy bázisát, valamint számítsa ki a mátrixok rangját. Fejezze ki az oszloptér egy bázisában a vektorok koordinátáit.

$$\begin{bmatrix}3&3&3&3&3\\3&4&5&4&3\\3&2&1&2&3\\3&3&3&3&3\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&5&9\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&3&9\\2&4&8\\9&3&1\\8&4&2\end{bmatrix}.$$

6. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, majd ezt felhasználva az összes megoldását!

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 3\\ 2x_1+x_2-x_3 &= 2\\ 3x_1+2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 3\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= 1 \end{aligned}$$