Felsőbb matematika **2. gyakorlat** **2016. március 3-11.**

1. Legyen $A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc} 1 & -20 \\ 4 & -1 \\ \hline 2 & 11 \end{array}\right]$, $C = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$.

   Végezzük el a kijelölt mátrixműveletek közül azokat, amelyek értelmezve vannak közönséges mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is: AB, $A + C$, $3A + B^T$, BA, CA, AC, C^2, AA^T, CC^T

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Adjuk meg az alábbi mátrixok LU-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Az együtthatómátrix LU-felbontását felhasználva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &= -2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}.$$

5. Az LU-felbontást felhasználva határozzuk meg a 3. feladatban szereplő mátrixok inverzét!

6. Adjuk meg az alábbi mátrixok PLU-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3), (8,1,2), (4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

8. Határozzuk meg az alábbi mátrixok bázisfelbontását!

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

9. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & 0 & \dots & 0 \\ c & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Legyen A olyan 2015×2015-ös mátrix, amelyre $\det(A^T) = \det(-A)$. Mennyi $\det(A)$?

11. Legyenek A, B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Igaz-e, hogy $\det(A^T B) = \det(BA)$? Igaz-e, hogy $\det^4(-A) = \det(A^4)$? Igaz-e, hogy ha $\det(A) = 1$, akkor $\det(A^{-1}B) = \det(AB)$? Van-e olyan A mátrix, amelyre $\det(A^T A) = 1$, viszont $\det(A) \neq 1$?

12. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyeletrendszereket a Cramer-szabály felhasználásával.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &= -2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 2 \\ 3x + y + z &= 4 \\ 2x - 2y + 3z &= 10 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}.$$

13. Határozzuk meg a 3. feladatban szereplő mátrixok inverzét előjeles aldeterminánsok segítségével.