

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diagonális felbontást! Határozzuk meg kitüntetett alterek bázisát!

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Számítsuk ki az előző feladatban szereplő mátrixok pszeudoinverzét!
3. Adjuk meg előző feladatban szereplő négyzetes mátrixok polárfelbontását!
4. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

$$\begin{aligned} &(\sqrt{3} - i, 6i, 3), \quad (0.1, -0.2, -0.2), \quad p = 1, 2, \infty; \\ &(1, 2, 2), \quad (2, 3, 6), \quad (1, 4, 8), \quad (4, 4, 7), \quad p = 2, \\ &(i, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, -4i), \quad p = 1, 2, \infty; \\ &(3, 4, 5), \quad (11, 12, 13, 14), \quad p = 3. \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2-, és ∞ normáját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$