Felsőbb matematika vizsga – 2014-06-05

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az xy-síkot $3\pi/2$ szöggel elforgatja és a $(0,1,1)$ vektort a -1-szeresébe viszi. *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel az $\sin \mathbf{J}$ mátrixot, ha *(2 pont)*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását! *(2 pont)*

A Gram–Schmidt-eljárás szerinti bázishoz $\mathbf{v}_2 = (3,5,-1,9) - \frac{(3,5,-1,9)(1,-1,-1,1)}{|(1,-1,-1,1)|^2}(1,-1,-1,1) = (1,7,1,7)$, innen $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ -0.5 & 0.7 \\ -0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$ $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}$-ból a felbontás:
$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

4. Adjuk meg az $\left\{ \begin{array}{c} x - y = 8 \\ 2x - 2y = 9 \\ 3x - 3y = 10 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását! *(2 pont)*

A megoldás $(x,y) = (2,-2)$. (A normálegyenlet $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, amiből $x - y = 4$. A sorteret pedig az $(1,-1)$ vektor generálja. Egy másik megoldás pszeudoinverzzel: $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.)

5. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris értékeit, 2-normáját, valamint inverzének 2-normáját! *(2 pont)*

3, 2, $\|\mathbf{A}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1/2$

6. Az alábbi mátrixok közül melyik pozitív definit? Amelyik nem, miért nem? Adjunk egyszerű indoklást! Melyik mátrix irreducibilis? *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ nem definit, mert sorai összefüggőek (első sorból második egyenlő harmadik), így rangja < 3, tehát egyik sajátértéke 0 (sokan kifelejtették a főminorok közül a mátrix determinánsát, ami már 0), $\mathbf{C}$ sem definit, mert 0 van a főátlóján. a $\mathbf{B}$ pozitív definit (minden főminora pozitív)!

Mindegyik irreducibilis.

7. Írjuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Mi a kapcsolat egy mátrix primitvitása és sajátértékei között?

Ha $\mathbf{A}$ nemnegatív irreducibilis mátrix, akkor pontosan akkor primitív, ha spektrálkörén csak egyetlen sajátérték van.

9. Legyen $\mathbf{A}$ egy komplex mátrix! Soroljuk fel azt a 4 feltételt, melyek fennállása ekvivalens azzal, hogy $\mathbf{X}$ mátrix az $\mathbf{A}$ pszeudoinverze. *(2 pont)*

$\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$, $(\mathbf{AX})^H = \mathbf{AX}$, $(\mathbf{XA})^H = \mathbf{XA}$

10. Mondjuk ki a Perron–Frobenius-tétel erősebb alakját (nemnegatív elemű mátrixokra). *(2 pont)*

Ha az $\mathbf{A}$ nemnegatív mátrix irreducibilis, és $r = \rho(\mathbf{A})$ jelöli a spektrálsugarát, akkor

1. $r > 0$,
2. r sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,
3. $\mathbf{A}$-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,
4. r egyszeres sajátérték.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{M}_{n\times n}$ mátrixnak van n lineárisan független sajátvektora, akkor diagonalizálható! *(3 pont)*

ld. jegyzet

12. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(4 pont)*

ld. jegyzet