

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Egy komplex vektortérben milyen tulajdonságokkal definiáljuk a skaláris szorzatot? (Jelölje a skaláris szorzatot egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{C}$ függvény.)

2. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix (a) diagonalizálható (a választ bázisok segítségével fejezzük ki), (b) diagonalizálható (a választ a geometriai multiplicitásokkal fejezzük ki), (c) ortogónálisan diagonalizálható, (d) unitéren diagonalizálható legyen? (2 pont)

3. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az $x + 2y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetít a z -tengellyel párhuzamosan. (2 pont)

4. Egy $m \times n$ -es \mathbf{A} mátrix $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ sortere és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ nulltere közt milyen két fontos összefüggést ismer?

5. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását és pszeudoinverzét! (2 pont)

6. Írjuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -20 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását! (2 pont)


7. Egy pozitív elemű 4-edrendű mátrix három sajátértéke $3, 3 - 4i, 3 + 4i$. A $4i, 5, -6, 6, 7i, 9$ számok közül válasszuk ki mindegyik olyat, amelyik a negyedik sajátérték lehet! Tömören indokoljuk választásunkat!

8. Az \mathbf{A} mátrix szinguláris értékei $2, 2, 1, 0, 0$. Határozzuk meg a Frobenius és a 2-normáját! Milyen képletekkel számolunk?

9. Melyik normális az alábbi mátrixok közül, melyik nem?

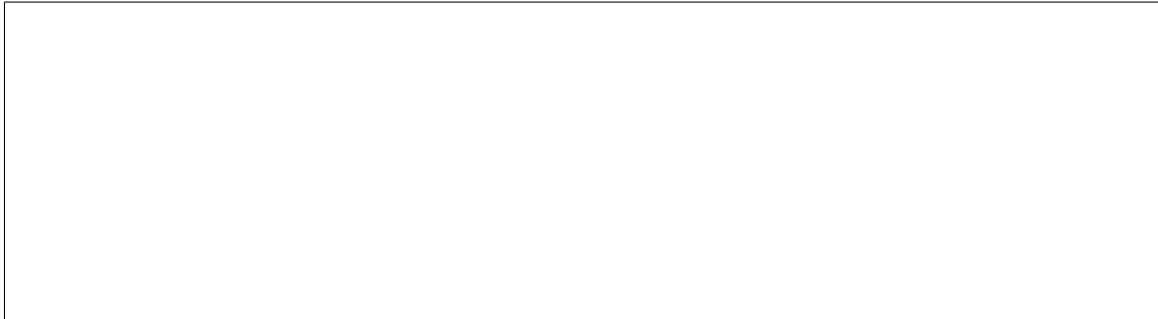
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Egy 8×8 -as \mathbf{A} mátrixnak λ 8-szoros algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 4, 2, 1, 0. Mennyi $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványai nullterének dimenziója? Írjuk fel a Jordan-mátrixát! (2 pont)

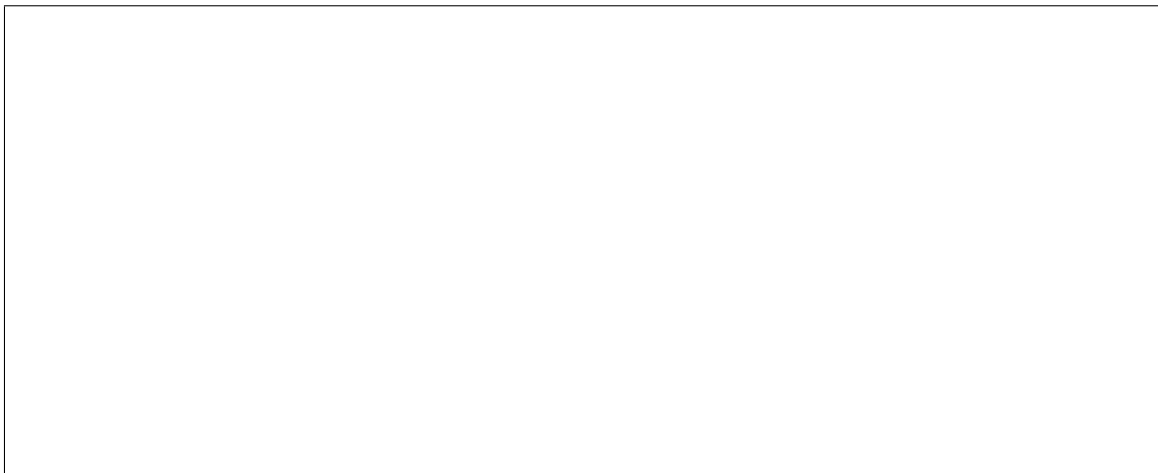


11. Írjuk le a Birkhoff-tételt!

(2 pont)



12. Melyek azok a mátrixok, amelyek szinguláris felbontása egybeesik sajátfelbontásával? Állításunkat igazoljuk! (4 pont)



13. Igazoljuk, hogy egy megoldható lineáris egyenletrendszernek van a sortérbe eső megoldása, és az egyértelmű. (4 pont)

