Felsőbb matematika vizsga – 2014-06-05

Név ______________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az xy-síkot $3\pi/2$ szöggel elforgatja és a $(0,1,1)$ vektort a -1-szeresébe viszi. *(2 pont)*

2. Írjuk fel az $\sin \mathbf{J}$ mátrixot, ha *(2 pont)*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását! *(2 pont)*

4. Adjuk meg az $\left\{ \begin{array}{c} x - y = 8 \\ 2x - 2y = 9 \\ 3x - 3y = 10 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását! *(2 pont)*

5. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris értékeit, 2-normáját, valamint inverzének 2-normáját! *(2 pont)*

6. Az alábbi mátrixok közül melyik pozitív definit? Amelyik nem, miért nem? Adjunk egyszerű indoklást! Melyik mátrix irreducibilis? *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Írjuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

8. Mi a kapcsolat egy mátrix primitvitása és sajátértékei között?

9. Legyen $\mathbf{A}$ egy komplex mátrix! Soroljuk fel azt a 4 feltételt, melyek fennállása ekvivalens azzal, hogy $\mathbf{X}$ mátrix az $\mathbf{A}$ pszeudoinverze. *(2 pont)*

10. Mondjuk ki a Perron–Frobenius-tétel erősebb alakját (nemnegatív elemű mátrixokra). *(2 pont)*

11. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{M}_{n\times n}$ mátrixnak van n lineárisan független sajátvektora, akkor diagonalizálható! *(3 pont)*

12. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(4 pont)*