

1. Tekintsük a 2-elemű $\mathbb{F}_2$ test fölötti 5-dimenziós tér alábbi négy vektorát: $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 1, 1, 0)$. E vektorok mely lineáris kombinációi adnak nullvektort, és mely lineáris kombinációik egyenlők a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 0, 1)$ vektorral? (2 pont)

2. Legyen A az a lineáris leképezés, mely a sík vektorait az x -tengelyre vetíti merőlegesen. Tekintsük a $\mathbf{b}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -1)$ vektorokból álló $\mathcal{B}$ bázist! Írjuk fel az A leképezésnek a $\mathcal{B}$ bázisbeli mátrixát! (2 pont)

3. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárookra ($i = 1, 2, \dots, n$) egy $y = Ae^{\alpha t} + B \cos \beta t + C \sin \beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert, rögzített paraméterek, és A , B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszer együtthatómátrixát és az optimális megoldást adó egyenletrendszer mátrixszorzatos alakját! (2 pont)

4. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix (a) diagonalizálható (a választ bázisok segítségével fejezzük ki), (b) diagonalizálható (a választ a geometriai multiplicitásokkal fejezzük ki), (c) ortogonálisan diagonalizálható, (d) unitéren diagonalizálható legyen? (2 pont)

5. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását, és ezt használva írjuk fel azt az 1-rangú mátrixot, mely Frobenius-normában a legközelebb van $\mathbf{A}$ -hoz. (2 pont)

6. Az $\mathbf{A}_{5 \times 5}$ valós mátrix sajátértékei 1 (háromszoros algebrai multiplicitással) és 2 (kétszeres multiplicitással). A geometriai multiplicitása mindkettőnek egy. Az 1-hez tartozó Jordan-lánc: $(1, 1, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 0) \rightarrow \mathbf{0}$, a 2-höz tartozó: $(0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0) \rightarrow \mathbf{0}$. Írjuk fel az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot (a fenti vektorokat és $\mathbf{A}$ Jordan-alakját használva, a mátrixszorzásokat és a mátrixinvertálást nem kell elvégezni)! (2 pont)

7. Adjuk meg az alábbi ellentmondásos egyenletrendszer egy optimális megoldását a megfelelő pszeudinverz kiszámításával! (2 pont)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 15 \\ 2x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

8. Mi a kapcsolat egy mátrix primitvitása és sajátértékei között?

9. Mondjuk ki a Perron–Frobenius-tétel erősebb alakját (nemnegatív elemű mátrixokra). *(3 pont)*

10. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(3 pont)*

11. Írjuk le annak bizonyítását, hogy ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren diagonalizálható! *(4 pont)*