Felsőbb matematika vizsga – 2014-06-12

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Mit értünk egy valós és mit egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán? *(2 pont)*

2. Householder-tükrözéssel határozzuk meg azt a $\mathbf{H}$ mátrixot, mely a $(2, 2, 1)$ vektort olyan vektorba viszi, melynek az első koordinátáját kivéve minden koordinátája 0. *(2 pont)*

3. Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

4. Végezzük el a főtengelytranszformációt az $x^2+4xy-2y^2$ kvadratikus formán! *(2 pont)*

5. Az $\mathbf{A}_{5\times 5}$ valós mátrix sajátértékei 1 (háromszoros algebrai multiplicitással) és 3 (kétszeres multiplicitással). A geometriai multiplicitások egy, illetve kettő. Az 1-hez tartozó Jordan-lánc: $(1, 1, 1, 0, 0) \to (0, 1, 1, 1, 0) \to (0, 0, 1, 1, 1) \to \mathbf{0}$, a 3-hoz tartozó sajátvektorok $(1, 0, 0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0, 0, 0)$. Írjuk fel az $\mathbf{A}^{100}$ mátrixot (a fenti vektorokat és $\mathbf{A}$ Jordan-alakját használva, a mátrixműveleteket nem kell elvégezni)! *(2 pont)*

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását, és ezt használva írjuk fel azt az 1-rangú mátrixot, mely Frobenius-normában a legközelebb van $\mathbf{A}$-hoz. *(2 pont)*

7. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, ∞- Frobenius- és 2-normáját! *(2 pont)*

8. Fogalmazzuk meg a mátrixok unitér diagonalizálhatóságára vonatkozó tételt, és írjuk le a tételben szereplő két legfontosabb fogalom definícióját is! *(2 pont)*

9. Igazoljuk, hogy egy szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha van olyan invertálható $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$. *(3 pont)*

10. Bizonyítsuk be, hogy minden lineáris $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezéshez van olyan $\mathbf{M}$ mátrix, hogy $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}$. *(3 pont)*

11. Röviden igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei és szinguláris értékei megegyeznek. *(3 pont)*