Felsőbb Matematika 1. ZH 2012-10-24

1. Legyen $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ és $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ két bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Írjuk fel a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$, a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}$ és a a $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$ áttérések mátrixát! Írjuk fel a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1,1,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli koordinátás alakját! *(4 pont)*

2. Ortogonálisan diagonalizáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot, azaz határozzuk meg azt a $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrixot és $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, melyekkel $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^T$, és írjuk fel $\mathbf{A}$ redukált szinguláris felbontását! *(4 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Írjuk fel annak a 10×10-es mátrixnak a Jordan-féle normálalakját, melynek egyetlen sajátértéke λ, és amelyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ rangja $k = 1,2,3,4$ esetén rendre 5, 2, 1, 0. *(3 pont)*

4. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét! *(2 pont)*

5. Melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül? *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

6. Melyek irreducibilisek és melyek primitívek az alábbi mátrixok közül? *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = (1,1,0,1)$ egyenletet $\mathbb{F}_2$ fölött, ahol *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hány megoldása van az egyenletrendszernek? (b) Legyen $A : \mathbf{F}_2^k \to \mathbf{F}_2^n; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$. Adjuk meg k és n értékét! (c) Mennyi $\operatorname{Ker} A$ és $\operatorname{Im} A$ dimenziója?

8. Mutassuk meg, hogy r-reguláris gráf $\mathbf{A}$ adjacenciamátrixának az r szám egy sajátértéke, és minden más λ sajátértékre $|\lambda| \leq r$. *(3 pont)*