

1	2	3	4	5	6	7	Σ

1. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris felbontását! Határozzuk meg azt az 1-rangú \mathbf{B} mátrixot, mely 2-normában a legközelebb van az \mathbf{A} mátrixhoz, azaz melyre a $\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_2$ minimális! (5 pont)

2. Egy 8×8 -as \mathbf{A} mátrix sajátértékei 1 és 2. Az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 4, 3, 3, az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 5, 5. Írjuk fel Jordan-féle normálalakját! (5 pont)

3. Az \mathbf{A} mátrix Jordan-féle normálalakja $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Írjuk

fel \mathbf{A} minimálpolinomját, és határozzuk meg azt a legkisebb fokú p polinomot, melyre $p(\mathbf{A}) = \sqrt[3]{\mathbf{A}}$. Ennek alapján szá-

mítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix köbgyökét (melynek

Jordan-féle normálalakja a fenti mátrix)! (6 pont)

4. Irreducibilis-e és primitív-e az \mathbf{A} mátrix, és mennyi a 2-normája? (5 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

1. Mit jelent az, hogy az \mathbf{A} mátrixnak \mathbf{x} általánosított sajátvektora? *(1 pont)*
2. Mit tudunk egy nem negatív irreducibilis mátrix spektrálkörön lévő sajátértékeiről? *(2 pont)*
3. Mit jelent az, hogy egy mátrix „permutációmátrixok konvex lineáris kombinációja”? *(2 pont)*

6. Igazoljuk, hogy ha \mathbf{A} egy tetszőleges komplex mátrix, akkor $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ önadjungált és pozitív szemidefinit! *(6 pont)*

7. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Határozzuk meg az $\|\mathbf{A}\|_\infty$ és $\|\mathbf{A}\|_1$ értékét!
- b) Mennyi e mátrix spektrálsugara?
- c) Ha ρ jelöli \mathbf{A} spektrálsugarát, létezik-e az $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\rho} \mathbf{A})^n$ határérték?
- d) Ha létezik az előző határérték, határozzuk meg! (8 pont)