Tartalomjegyzék

Listák

Tételek, állítások, következmények

Definíciók

Kidolgozott példák

Jelölések

Képlet	oldal	megjegyzés
$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$	34	**a** vektor **b**-re eső vetülete
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	31	**a** és **b** skaláris szorzata
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	37	**a** és **b** vektori szorzata
$(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$	23	**a** és **b** szöge
$(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle$	36	**a** és **b** irányított szöge
$:=$		definiáló egyenlőség
i, i		imaginárius egység, és az i változó
e, e		az e szám, és az e változó
$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$		komplex, valós, racionális, illetve egész számok
$\mathbb{Z}_m$	477	modulo m vett maradékosztályok
$\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p$	478	a modulo p (p prím) vett maradékosztályok, a prímelemű test
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	23	az **a** vektor abszolút értéke
$\lVert\mathbf{a}\rVert$	23	az **a** vektor normája
a_{ij}, $a_{i,j}$	162	az **A** mátrix i-edik sorának, j-edik oszlopának eleme
$\mathbf{a}_{i*}$	162	az **A** mátrix i-edik sorvektora
$\mathbf{a}_{*j}$, $\mathbf{a}_j$	162	az **A** mátrix j-edik oszlopvektora
$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$	134	a **v** vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakja
$[L]_{\mathcal{B}}$		az L lineáris leképezés $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixa
A, $\mathbf{A}$		az A lineáris leképezés és annak **A** mátrixa a standard bázisban

A jelölések kiválasztásánál azt az elvet követtük, hogy a fontosabb jelölések esetén a nemzetközi angol nyelvű matematikai szakirodalomban elterjedt jelölések valamelyikét követtük. Ez a lebegőpontos számok írására is vonatkozik, tehát nem a magyar irodai szabványt követjük, így nem *tizedesvesszőt*, hanem *tizedespontot* használunk.

I. rész

A lineáris algebra forrásai

A lineáris algebra két fő forrásának egyike a geometria, másika az algebra vidékéről ered. Mindkét forrás jól jellemezhető egy-egy elemi fogalommal: az egyik a vektor, a másik a lineáris egyenletrendszer. E könyv első része e két fogalmat vizsgálja egészen elemi, középiskolai szintről indulva. A lineáris algebra mélyebb fogalmai már itt fölbukkannak, de csak nagyon egyszerű és a legkevésbé absztrakt formájukban. Az első rész végére látni fogjuk, hogy e két forrás már ezen a bevezető szinten szétválaszthatatlanul egyetlen folyammá válik.

Hang gliding @ Pule (CC) on flickr by purplemattfish

2

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

A lineáris egyenletrendszerek geometriai megközelítése után megismerjük a megoldás technikáit, végül a megoldások halmazának szerkezetét!

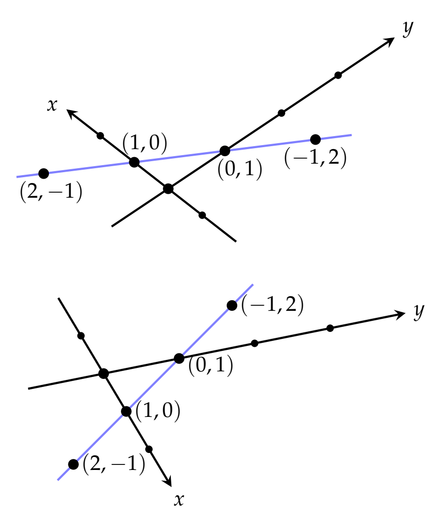
Egyenes és sík egyenletei

A sík és tér pontjainak és vektorainak koordinátáit használva lehetővé válik geometriai alakzatok algebrai vizsgálata, vagy algebrai problémák jobb megértése geometriai szemléltetéssel.

2.1. PÉLDA (AZ $x + y = 1$ EGYENLET). *Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x + y = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!*

Alakzatok és egyenletek

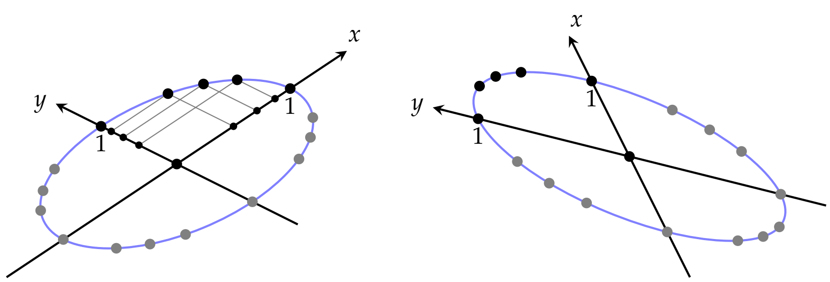
MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. □



2.1. ábra: Az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.

2.2. PÉLDA (AZ $x^2 + y^2 = 1$ EGYENLET). *Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!*

MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak. □



2.2. ábra: Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordinátarendszerben.

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett*, *rejtett*, ami az összeköt, összefügg, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha…, akkor…” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

2.3. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (IMPLICIT) EGYENLETRENDSZERE). *Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó* (implicit) egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat* egyenletéről *beszélünk. Az egyenletet* vektoregyenletnek *nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \textit{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \quad\vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *a tér egy pontja, és* $\mathbf{r}$ *az oda mutató vektor.*

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete $y = x$, azaz $x - y = 0$. Ortonormált bázist választva az origó középű egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Az előző két egyenlet mindegyikéből *kifejezhető* a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $y = x$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel, míg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

egyenlettel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *kifejtett*, *világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejt, megfejt jelentésű *explico* (explicō) szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.

2.4. definíció (Alakzat (explicit) egyenletrendszere). *Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó* (explicit) egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja*

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \ldots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \ldots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

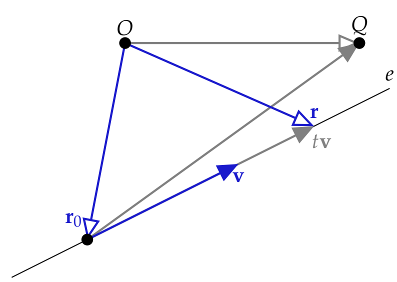
ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2, \ldots, t_n \in I_n$, *és* $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. *Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ *egy* $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás* paraméteres egyenletrendszernek *is nevezni.*

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

Síkbeli egyenes egyenletei Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.



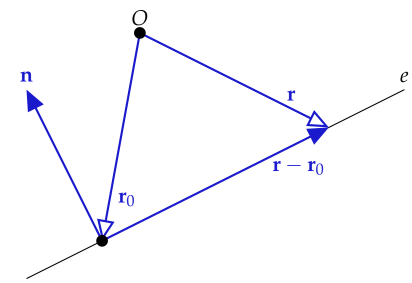
2.3. ábra: Egyenes explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

2.5. állítás (Síkbeli egyenes explicit vektoregyenlete). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.1}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ *az egyenes egy irányvektora, és* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektorainak* nevezzük. Legyen $\mathbf{n}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$-re merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy normálvektora. Azt, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$-re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$. Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ jelölés bevezetésével $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$ alakra hozható.



2.4. ábra: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$.

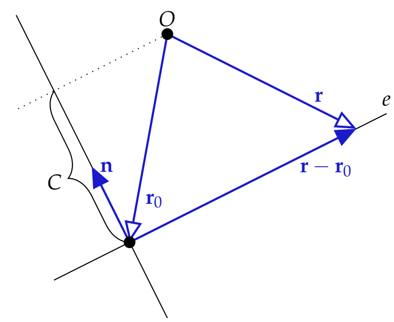
2.6. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \tag{2.2}$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C \tag{2.3}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *az egyenes egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*



2.5. ábra: Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$. Ha $\mathbf{n}$ *egységvektor*, akkor az $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{n}$ egyenesére eső merőleges vetülete C. Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.

A (2.2) alakú egyenlet könnyen átírható (2.3) alakúvá a $C=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0=C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$-re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=D$, akkor $\mathbf{n}\cdot(\frac{C}{D}\mathbf{v})=C$, így az $\mathbf{r}_0=\frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r}=(x,y)$, $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0)$ és $\mathbf{v}=(a,b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.7. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A sík minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x&=x_0+at\\ y&=y_0+bt \end{aligned} \tag{2.4}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a,b) *az egyenes egy irányvektora, és* (x_0,y_0) *az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

2.8. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE). *A sík minden* *egyenesének van*

$$Ax + By = C \tag{2.5}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti implicit egyenlete az egyenes $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen $(A, B) = (b, -a)$. Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az (a, b) irányvektorra. Továbbá $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ formulát adja. Ha a koordinátarendszer nem ortonormált, az (A, B) vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért a (2.5) egyenletről mondott állítás igaz. A ??. fejezetben tanultak alapján az egyenes egyenletét a vektoregyenletből majd nem ortonormált koordinátarendszer esetén is le tudjuk vezetni, most viszont egy olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t, és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban $A = b$ és $B = -a$. Ekkor a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst C-vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0-t választva, egyértelműen kifejezhető x_0. (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható a (2.4) egyenletrendszer. □

2.9. PÉLDA (SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI). *Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a* $(2,3)$ *és az* $(1,1)$ *koordinátájú pontokon.*

MEGOLDÁS. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2,3) - (1,1) = (1,2)$. Legyen $\mathbf{r}_0 = (1,1)$, de az $\mathbf{r}_0 = (2,3)$ választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Explicit (paraméteres) egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból $(A,B) = (2,-1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2,-1) \cdot (x-1, y-1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja. □

Síkbeli pont egyenletei Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extremális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1,0)$ illetve $(0,1)$, és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y &= C_1\\
A_2x + B_2y &= C_2
\end{aligned}
$$

Az azonban itt nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8.. és 1.11. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

2.10. Állítás (Sík explicit vektoregyenlete). *Bármely síknak van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \tag{2.6}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *a sík két lineárisan független vektora, és* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.17. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

2.11. Állítás (Sík implicit vektoregyenlete). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{2.7}$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{2.8}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *a sík egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal.

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.12. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A háromdimenziós tér minden síkjának van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \end{aligned} \tag{2.9}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a_1, b_1, c_1) és (a_2, b_2, c_2) a sík két lineárisan független vektora, és (x_0, y_0, z_0) a sík egy tetszőleges rögzített pontja.

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - b_1a_2)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

2.13. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT EGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$Ax + By + Cz = D \tag{2.10}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{2.11}$$

ami épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordinátás alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

2.14. PÉLDA (SÍK EGYENLETEI). *Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegy a $(0, -1, 2)$, a $(-1, 0, 7)$ és a $(2, 1, 4)$ pontokon.*

MEGOLDÁS. A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (2,1,4) - (0,-1,2) = (2,2,2), \text{ és}\\ \mathbf{v} &= (-1,0,7) - (0,-1,2) = (-1,1,5).\end{aligned}$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0,-1,2)$ választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\1\\5\end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned}x &= \phantom{-1+{}} 2s - t\\ y &= -1 + 2s + t\\ z &= 2 + 2s + 5t\end{aligned}$$

Mivel a (2.11) képlet szerint $(A,B,C) = (8,-12,4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x-0) - 12(y-(-1)) + 4(z-2) = 0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordinátarendszerben a

$$(2,-3,1)\cdot(x,y,z) = 5, \text{ vagy } (2,-3,1)\cdot(x,y+1,z-2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlet alakja. □

Térbeli egyenes egyenletei Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk a 65. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e-re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

2.15. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós tér minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.12}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ *az egyenes egy irányvektora, és* $\mathbf{r}_0$ *egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felveszünk egy koordinátarendszert, melyben $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b, c)$:

2.16. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \tag{2.13}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b, c) *az egyenes egy irányvektora, és* (x_0, y_0, z_0) *az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A fenti explicit (paraméteres) egyenletrendszerből a paraméter kiküszöbölhető. Ha az a, b és c számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel t, akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel t, akkor mindegyikből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha a, b és c egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A t-t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0), \quad c(x - x_0) = a(z - z_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. Kivétel az az eset, amikor az egyik egyenlet $0 = 0$ alakú, ilyenkor a másik két egyenlet egy-egy sík egyenlete. Egy egyenes azonban megadható két sík metszésvonalaként, így adódik a következő tétel, melynek bizonyítását feladatként tűzzük ki:

A három síkból azonban már kettő is meghatározza az egyenest, így két egyenletből álló egyenletrendszerrel is megadható az egyenes. Bizonyítható az alábbi állítás:

2.17. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. Ha az egyenes egy irányvektora* (a, b, c), *akkor a két egyenlet az alábbi három közül* *bármelyik kettő, amelyik nem $0 = 0$ alakú:*

$$
\begin{aligned}
b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\
c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\
c(y - y_0) &= b(z - z_0)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

► A (2.14) egyenletrendszer a következő alakba is átírható:

$$
\begin{array}{rrrcrr}
bx & -ay & & = bx_0 & -ay_0 & \\
cx & & -az & = cx_0 & & -az_0 \\
 & cy & -bz & = & cy_0 & -bz_0
\end{array}
\tag{2.15}
$$

Erről könnyen leolvasható, hogy ha pl. $a \neq 0$, akkor a második egyenlet b-szereséből kivonva az első egyenlet c-szeresét, a harmadik egyenlet a-szorosát kapjuk. Hamarosan látni fogjuk, hogy eszerint a harmadik egyenlet elhagyható, anélkül, hogy az egyenletrendszert kielégítő pontok halmaza megváltozna.

2.18. PÉLDA (TÉRBELI EGYENES EGYENLETRENDSZEREI). *Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az $A(1,3,4)$ és az a) $B(3,3,1)$ b) $B(5,5,-2)$ ponton.*

MEGOLDÁS. *a)* A két pontot összekötő vektor $= (2,0,-3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 2t \\
y &= 3 \\
z &= 4 - 3t
\end{aligned}
$$

második egyenlete $y = 3$ egy xz-síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenlet mindegyikéből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x-1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z-4)$ hogy $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$
\begin{array}{rrrl}
3x & & +2z & = 11 \\
 & y & & = \;\;3
\end{array}
$$

b) A két pontot összekötő vektor itt $= (4,2,-6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 4t \\
y &= 3 + 2t \\
z &= 4 - 6t
\end{aligned}
$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t-t, és ezeket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \quad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} x - 2y \phantom{{}+2z} &= -5 \\ 3x \phantom{{}-2y} + 2z &= 11 \\ 3y + z &= 13 \end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere. □

Térbeli pont egyenletei Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y+z} &= x_0 \\ y \phantom{{}+z} &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y + 0z &= x_0 \\ 0x + y + 0z &= y_0 \\ 0x + 0y + z &= z_0 \end{aligned}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned}$$

Itt is óvatosnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$-ben Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$-ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$-ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

2.19. PÉLDA (EGYENES ÉS SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Írjuk fel az $A(1,1,1,1)$, $B(2,3,2,4)$ pontokon átmenő egyenes, és az A, B és $C(3,2,1,0)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!*

MEGOLDÁS. Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

□

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet az n-dimenziós tér egy $n-1$-dimenziós alakzatának egyenlete ($n = 2,3$). A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.20. PÉLDA (HIPERSÍK EGYENLETE). *Mutassuk meg, hogy az*

$$x + 2y + 3z + 6w = 12$$

egyenletű hipersík bármely két pontját összekötő vektor merőleges az $(1,2,3,6)$ *vektorra, azaz vele való skaláris szorzata* 0.

MEGOLDÁS. Ha az (x_1, y_1, z_1, w_1) és az (x_2, y_2, z_2, w_2) pontok a megadott hipersíkon vannak, akkor

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 6w_1 &= 12 \\ x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 6w_2 &= 12 \end{aligned}$$

Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor az

$$(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2) + 6(w_1 - w_2) = 0$$

egyenlethez jutunk, amely skalárszorzat alakban

$$(1,2,3,6) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, w_1 - w_2) = 0,$$

ami épp azt jelenti, hogy a két pontot összekötő vektor merőleges az $(1,2,3,6)$ vektorra. □

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit. Az $\mathbb{R}^n$-beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, viszont arra bíztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Feladatok

2.1. Ide egy-két feladatot!

A lineáris egyenletrendszer és két modellje

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer megoldásának két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer Az előző rész végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja $Ax + By = C$, ahol A, B és C konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához.[1]

[1] *Lineáris:* a *vonalas* jelentésű latin lineāris szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászzsinór*, átvitt értelemben *vonal*, *határvonal* jelentésű linea (līnea) szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú* értelemben szokás használni.

2.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLET). *Az*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.16}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 \dots x_n$ ismeretlenekben lineáris egyenletnek *nevezzük, ahol a_1, a_2,… és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, a_2,… és a_n konstansokat az egyenlet* együtthatóinak *b-t az egyenlet* konstans tagjának *nevezzük.*

▶ Például az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5-\pi)x_3 = 0, \quad a\cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

▶ A következő egyenletek nem lineárisak az x, y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x\sin z + y\cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméter, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

▶ Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x, y és z ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

▶ Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

egyenlet nem lineáris, mert a z-vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Lineáris egyenletek egy véges halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenei mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

► Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= 3 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad 2x - 3y + z - w = 6. \tag{2.17}$$

► Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely $0 = b$ alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes együtthatók paraméterek. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így a következő egyenletrendszerek is lineárisak az x, y ismeretlenekben:

$$\begin{aligned} ax + \phantom{\frac{1}{a}}y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mindezek után fölírjuk az egyenletrendszer általános alakját:

2.22. definíció (Lineáris egyenletrendszer). Lineáris egyenletrendszer*en ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.19}$$

ahol x_1, x_2,... x_n az ismeretlenek, a_{ij} az i-edik egyenletben az x_j ismeretlen együtthatóját jelöli, és b_i az i-edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0*, a lineáris egyenletrendszer* homogén*, ha csak egy is különbözik* 0*-tól* inhomogén*.*

► A (2.17) egyenletrendszerei mind inhomogének, míg a (2.18) középső egyenletrendszere homogén.

2.23. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Azt mondjuk, hogy a rendezett* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *szám-n-es* megoldása *a (38) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz minden egyenletet kielégít az* $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2, \dots$ $x_n = u_n$ *helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak tekintjük,* megoldásvektorról *beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer* megoldáshalmazának *nevezzük. Egy egyenletrendszert* megoldhatónak *vagy* konzisztensnek *nevezünk, ha van megoldása, azaz ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer* nem megoldható *vagy* inkonzisztens.

Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, *túlhatározottnak* nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, *alulhatározottnak*. E fogalmak időnként félrevezető megfogalmazásokhoz és téves következtetésekre vezetnek, ha az az elképzelés alakul ki, hogy a túlhatározottság azt jelenti: az egyenletek (a feltételek) már „túl sokan” vannak ahhoz, hogy akár csak egy szám-n-es is kielégítse. Később látni fogjuk, hogy ezzel ellentétben nem a „túl sok” egyenlet, hanem az egymásnak ellentmondó egyenletek okozzák az inkonzisztenciát. Hasonlóképp az alulhatározottság nem jelenti azt, hogy szükségképpen több megoldás is van. Alulhatározott egyenletrendszer is lehet inkonzisztens. Egyedül annyi mondható: alulhatározott egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása.

► A (2.17) egyenletrendszereinek egy-egy megoldása: $(x, y) = (2, 4)$, $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 4)$, $(x, y, z, w) = (2, 0, 2, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek több megoldása is van, például egy másik megoldás az $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 0)$.

► A (2.18) első egyenletrendszerének megoldása $(x, y) = (1, a)$, a másodiké $(x, y) = (0, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek nincs megoldása, hisz nincs olyan x és y érték, melyre fönnállna a $0x + 0y = 2$ egyenlőség.

► Általában, a
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$
egyenletnek minden szám-n-es megoldása, míg a
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$
egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{2.20}$$
Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

2.24. DEFINÍCIÓ (EKVIVALENS EGYENLETRENDSZEREK). *Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert* ekvivalensnek *nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.*

2.25. TÉTEL (EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK). *Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:*
1. *két egyenlet felcserélése;*
2. *egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;*
3. *egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.*

Ezen kívül

4. *egy* $0 = 0$ *alakú egyenlet elhagyása*

is ekvivalens átalakítás, de ez eggyel csökkenti az egyenletek számát.

BIZONYÍTÁS. Az első kettő és a negyedik átalakítás nyilvánvalóan nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedikkel kapcsolatban lásd a 2.9. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást. Tekintsük az *eredeti* egyenletrendszer egy megoldását, és azt az *új* egyenletrendszert, melyet az i-edik egyenlet c-szeresének a j-edikhez adásával kapunk. Világos, az átalakítás előtt is elvégezhetjük a behelyettesítést, akkor viszont egy kielégített egyenlőség konstansszorosát adjuk egy másikhoz, ami így ugyancsak ki lesz elégítve. Tehát az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Másrészt viszont az új egyenletrendszer minden megoldása az eredetinek is megoldása, hisz az visszakapható az újból az i-edik egyenlet $-c$-szeresének a j-edikhez adásával. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens. □

Mátrix: a latin mater (māter) (*anya*, *szülőanya*, *forrás*) szó származéka a matrix (mātrīx), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat*, *vemhes állat*, *anyaméh*, *bezárt hely*, *ahonnan valami kifejlődik*, *bezárt*, *körülzárt dolgok sokasága*, *tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

Mátrixok Az egyenletrendszer megoldásában az ekvivalens átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, ezért az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit elég csak egy olyan táblázaton elvégezni, mely az együtthatókat és a konstansokat tartalmazza. Az ilyen számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük.

A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$-es mátrixnak m sora és n oszlopa van. Egy ilyen mátrix általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrixokat[2] általában nagy betűvel jelöljük, e könyvben – követve a műszaki nyelv szokásait – félkövér nagy betűvel. A matematikában elterjedt az a szokás, hogy a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűk jelölik a mátrix elemeit, tehát $\mathbf{A}$ elemei a_{11}, a_{12}.... A fenti mátrixra szokás még a tömörebb

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{vagy egyszerűen az} \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést használni. Sokan használnak szögletes helyett kerek zárójelet a mátrixok jelölésére.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát a_{23} a 2-dik sor 3-adik oszlop kereszteződésében álló elemet jelöli. Időnként, a félreérthetőség elkerülésére a_{ij} helyett $a_{i,j}$-t írunk (pl. $a_{n,n-1}$).

A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyiadik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei a_{11}, a_{22},....

[2] A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az `A`-val jelölt mátrix (informatikai szóhasználattal *tömb*) i-edik sorának j-edik elemét `A[i,j]` vagy `A(i,j)` jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így `A[i]` az i-edik sort, `A[i][j]` az i-edik sor j-edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektora vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az `A` mátrix 2. sorát az `A(2,:)`, 3. oszlopát a `A(:,3)` kóddal érhetjük el. Sok programnyelvben a tömbök elemeit nem 1-től, hanem 0-tól indexelik, ilyen például a C és a Python is.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel*, *mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az $n \times 1$-es mátrixot *oszlopvektornak* vagy *oszlopmátrixnak*, az $1 \times n$-es mátrixot *sorvektornak* vagy *sormátrixnak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy n-dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Manapság jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni, de egyes témáknál a másik használatát is bemutatjuk. Így tehát az $(1, 2)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

VEKTOROK MAGYAR IRODAI és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a *vektor koordinátái* közé *elválasztójelként*. Magyar nyelvű felsőbb matematika szövegekben ez nem szokás, mi is elkerüljük, és tizedespontot, vektor koordinátái közt vesszőt használunk. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral (sormátrixszal) való megadásnál írásjelet nem használunk, csak szóközzel választjuk el a koordinátákat!

Általában $\mathbf{a}_j$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható j-edik oszlopvektort, ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk. Ha sor- és oszlopvektorok is együtt szerepelnek, az i-edik sorvektort $\mathbf{a}_{i*}$, a j-edik oszlopvektort $\mathbf{a}_{*j}$ jelöli összhangban az elemek indexelésével. Ehhez hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j-edik oszlopára az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

2.26. PÉLDA (MÁTRIXOK ÉS ELEMEIK). *Ha*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \textit{ akkor } c_{23} = 7, \ \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített* mátrixa, vagy egyszerűen csak *mátrixa* az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal választhatjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól. A 2.22. definícióbeli általános alak együttható- és bővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A gyakorlatban nagy méretű egyenletrendszereket, s így nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. Ha elemeik nagy része 0, *ritka mátrixoknak* nevezzük. A nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezzük. Előbb a kis méretű sűrű mátrixokra hatékony módszerekkel ismerkedünk meg.

2.27. PÉLDA (MÁTRIX HASZNÁLATA A MEGOLDÁSHOZ). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Két lehetséges megoldást mutatunk. A (2.20) egyenletrendszereinél látott háromszög, illetve átlós alak elérése a cél. Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Kicseréljük az első két egyenletet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Kicseréljük az első két sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből (azaz -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez).

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból (azaz az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik sorhoz).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszerről azonnal leolvasható y és z értéke. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk x értékét is, nevezetesen $x + y + z = 3$, azaz $y = 1$ és $z = 0$ behelyettesítése után: $x + 1 + 0 = 3$, vagyis $x = 2$. Másik megoldási módszerhez jutunk, ha a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az elsőből:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. □

Sormodell: hipersíkok metszete A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében, szemléltetésében.

Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése a sormodellben jól nyomon követhető a SagePlayer sormodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

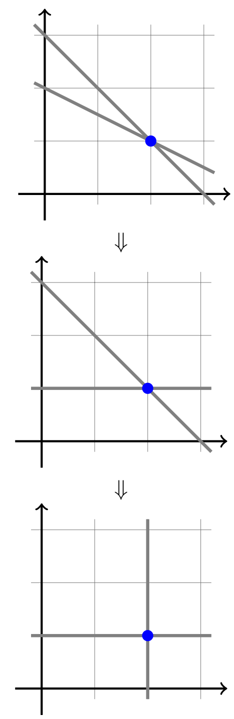
Tudjuk, hogy a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet kielégítő pontok halmaza egyenest alkot, ha a és b legalább egyike nem 0. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, tehát a megoldások halmaza a sík összes pontjának halmazával azonos. Ha $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, a megoldáshalmaz üres.)

2.28. PÉLDA (SORMODELL KÉT KÉTISMERETLENES EGYENLETTEL). *Ábrázoljuk az alábbi egyenletrendszereket és megoldásukat a sormodellben!*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \textit{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \textit{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer szerinti ábra egy metsző egyenespárt tartalmaz. Metszéspontjuk a megoldás. Ezt a 2.6 ábra felső rajza mutatja. Oldjuk meg az egyenletrendszert! A megoldás közben két újabb egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$



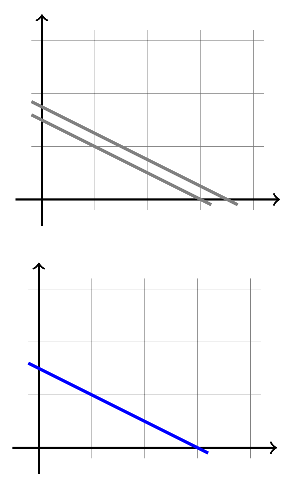
2.6. ábra: Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése

A 2.6 ábrán az így kapott egyenletrendszerek sormodell szerinti ábráit is megrajzoltuk.

A második egyenletrendszerben két párhuzamos egyenes egyenlete szerepel. Ezeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = 1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Valóban, a $0x + 0y = 1$ egyenletet kielégítő pontok üres halmazt adnak.

A harmadik egyenletrendszer egyenleteihez két egybeeső egyenes tartozik. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát ennek az egyenesnek a pontjaiból áll.

Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, itt egy a $0 = 0$ egyenletet kapjuk, amely így elhagyható. A megmaradó $x + 2y = 3$ egyenlet összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - 2t, t)$. □



2.7. ábra: A megoldás szemléltetése, ha a két egyenlet egyikének bal oldala nullává tehető

► Hasonlóan szemléltethető a 3-dimenziós térben a háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Fölsoroljuk a három háromismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszerre vonatkozó lehetőségeket:

- Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.8.

(a) ábra). Például a 2.27. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

- Lehet, hogy a három sík metszete egy egyenes. Ilyen például a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \tag{2.21}$$

egyenletrendszer. Ekkor a három normálvektor egy síkba (de nem egy egyenesbe) esik. Itt például a normálvektorok közt fennáll a

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) - (3, 2, 3) = \mathbf{0}$$

összefüggés. Ugyanez a lineáris kapcsolat áll fönn az egyenletek közt is, vagyis a harmadik egyenlet az első kettő összege, ami azt jelenti, hogy a harmadik egyenlet el is hagyható.

- Változtassuk meg a fenti egyenletrendszer harmadik egyenletének konstans tagját:

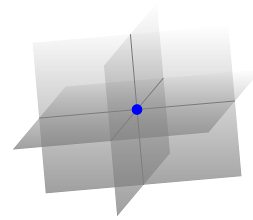
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ennek sormodell szerinti ábrája három olyan síkot tartalmaz, melyek párhuzamosak egy egyenessel, de nincs közös pontjuk, mint az a 2.9. *(b)* ábrán látható. Ha kivonjuk az első és második egyenletet a harmadikból, akkor az ellentmondó $0 = 1$ egyenletre jutunk, míg az imént a 2.21 egyenletrendszer esetén az elhagyható $0 = 0$ egyenletet kaptuk. Ennek oka, hogy bár a normálvektorok közt ugyanaz a lineáris kapcsolat van mint az imént (egy síkba esnek), az egyenletek lineárisan függetlenek! Általában is igaz, nincs megoldása az olyan egyenletrendszereknek, ahol bizonyos normálvektorok lineárisan összefüggők, de a hozzájuk tartozó egyenletek már nem. Gondoljuk meg, ilyen eseteket mutat a 2.9. *(a)* ábra is.

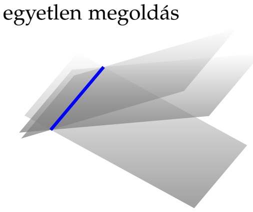
- Végül tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.23}$$

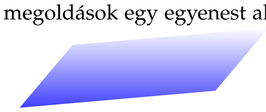
egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorosa, azaz ugyanannak a síknak az egyenletei, az egyenletrendszer tehát ekvivalens az egyetlen $x + y + z = 3$ egyenletből álló egyenletrendszerrel. Az y-nak és z-nek tetszőleges értéket választunk, például legyen $y = s$, $z = t$, akkor $x = 3 - y - z$, azaz $x = 3 - s - t$. Így az összes megoldás: $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$. Ezt



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás

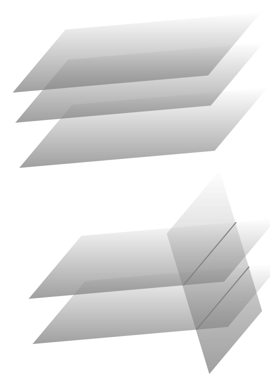


(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak



(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.8. ábra: Konzisztens (megoldható) egyenletrendszerek ábrázolása (a megoldáshalmazt kék szín jelzi)



(a) A síkok közül legalább kettő párhuzamos, de nem azonos

(b) Egy egyenessel párhuzamos, de közös egyenest nem tartalmazó három sík

2.9. ábra: Nem megoldható egyenletrendszerek oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a 2.8. *(c)* ábra szerint eset.

► A 2- és 3-dimenziós esetek analógiájára kialakíthatunk egy elképzelést az n-dimenziós esetre is. Itt minden egyenlet megoldáshalmaza a tér egy hipersíkja, kivéve a $0 = 0$ egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az egész tér, és a $0 = 1$ egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az üreshalmaz.

2.29. ÁLLÍTÁS (SORMODELL). *Ha egy n-ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{R}^n$-ben.*

Az m egyenlet a skaláris szorzás segítségével tömörebb alakban is fölírható. Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorvektorát, és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek vektorát, akkor az előző egyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i. \tag{2.24}$$

Ez különösen akkor lesz érdekes, ha homogén lineáris egyenletrendszereket fogunk vizsgálni, mert ott mindegyik egyenlet $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$ alakot ölt, ami azt jelenti, hogy olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, mely merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például a 2.28. példabeli

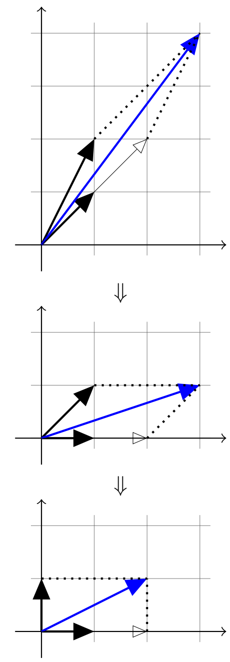
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Az oszlopmodell lépései jól nyomon követhetők a SagePlayer oszlopmodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

vektoregyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1,1)$ és $(1,2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3,4)$ vektorral.



2.10. ábra: A megoldás lépései a oszlopmodellben.

2.30. példa (Oszlopmodell). *Ábrázoljuk a 2.28. példában megadott*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszereket az oszlopmodellben!

Megoldás. Az első egyenletrendszer esetén két lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként kell előállítani egy harmadik vektort. Ezt szemlélteti a 2.10 ábra. Érdekességként itt is megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldásának lépései hogy mutatnak e modellben. Az ekvivalens átalakítások lépései:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x \quad &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

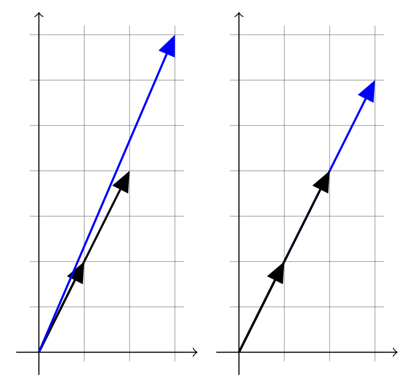
Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A második és harmadik egyenletrendszer vektoros alakja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A 2.11 ábráról szemléletesen is látható, hogy az egyik vektoregyenletnek nincs megoldása, míg a másiknak végtelen sok is van. □



2.11. ábra: Oszlopmodell lineárisan összefüggő vektorok esetén.

Általánosan kimondható a következő:

2.31. állítás (Oszlopmodell). *A 2.22. definícióban megadott (38) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.

E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel (ld. 2.11. feladat).

Feladatok

2.2.• Melyek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül?

a) $3x-(\ln 2)y+e^3z=0.4$ *b)* $a^2x-b^2y=0$

c) $xy-yz-zx=0$ *d)* $(\sin 1)x+y-\pi z=0$

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ *f)* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

2.3. $\left.\begin{aligned} x+3y&=5\\ y&=1\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x+y&=3\\ x\quad&=2\end{aligned}\right\}$

2.4. $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=2\\ 0x+0y&=3\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x+y&=2\\ x+y&=7\end{aligned}\right\}$

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az $a=1$, $b=2$, $c=3$ paraméterválasztás esetén!

2.5. $\left.\begin{aligned} (2a-b)x+(3a-c)y&=0\\ (3b-2c)x+(b-2a)y&=0\end{aligned}\right\}$

2.6. $\left.\begin{aligned} (b-a)x+(3a-c)y&=1\\ (3b-2c)x+(b-2a)y&=0\end{aligned}\right\}$

2.7. $\left.\begin{aligned} (b-a)x+(3a-c)y&=1\\ (3b-2c)x+(b-2a)y&=1\end{aligned}\right\}$

2.8. $\left.\begin{aligned} (b-a)x+(3a-c)y&=1\\ (3b-2c)x+\ (c-b)y&=2\end{aligned}\right\}$

2.9. EGYENLETRENDSZEREK KÖZÖS MEGOLDÁSA Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza $\mathcal{M}_1$, illetve $\mathcal{M}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszerek egyesítése, azaz $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$, és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ megoldáshalmaza, akkor $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös része, azaz $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$.

Vizsgáljuk meg ezt állítást az alábbi esetekben:

a) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,x-y=0\,\}$;

b) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2,\ x-y=0\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,x-y=0\,\}$;

c) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2,\ x-y=0\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,x-y=1\,\}$;

d) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2,\ x-y=0\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,0x+0y=0\,\}$;

e) $\mathcal{E}_1$ tetszőleges egyenletrendszer, $\mathcal{E}_2=\{\,0=0\,\}$.

2.10.• SOR ÉS OSZLOPMODELL Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) $\begin{aligned} 2x+3y&=7\\ 3x-2y&=4\end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x+4y&=3\\ 3x+6y&=4\end{aligned}$

2.11. SOR- ÉS AZ OSZLOPMODELL 3D-BEN Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+2z&=3\\ x+2y+4z&=3\\ 3x+4y+8z&=9\end{aligned}\qquad\begin{aligned} x+\ \ y+2z&=3\\ x+2y+4z&=3\\ 3x+4y+8z&=1\end{aligned}$$

2.12. SOR ÉS OSZLOPMODELL $m\neq n$ ESETÉN Vizsgáljuk meg az alábbi három egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

a) $\begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ x+\ \ y&=4\\ x+3y&=5\end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ x+2y&=4\\ x+3y&=5\end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ x+2y&=3\\ x+3y&=5\end{aligned}$

2.13.• IGAZ – HAMIS Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?

a) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer olyan hipersíkok egyenleteiből áll, melyek közt van két párhuzamos, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.

b) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík.

c) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független.

2.14.• Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből áll, melyek ha ...., akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma .... Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll.

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll, míg az oszlopmodellje a ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll. Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....-ból/ből áll.

Megoldás kiküszöböléssel

Elemi sorműveletek A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melyből visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.25. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakítás nem változtatja meg az egyenletrendszer egyenleteinek számát sem. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.[3]

2.32. definíció (Elemi sorműveletek). *Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket* elemi sorműveleteknek *nevezzük:*

1. Sorcsere: *két sor cseréje.*
2. Beszorzás: *egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.*
3. Hozzáadás: *egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.*

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$-vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor c-szeresét, hisz az a $-c$-szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.
2. cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel.
3. $S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésükre értelemszerűen az $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$ formulákat használjuk.

Lépcsős alak Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztünk átlós, vagy legalább átló alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.27. példában tettük. Ez nem mindig sikerül, mert néha nem kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsős alakhoz mindig el tudunk jutni.

2.33. definíció (Lépcsős alak). *Egy mátrix* lépcsős, *vagy* sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő két feltételt:*

1. *a csupa* 0*-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;*
2. *bármely két egymás után következő nem-*0 *sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több* 0 *van, mint a fölötte lévő sor elején.*

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek *vagy* pivotelemnek *hívjuk. Egy főelem oszlopának* főoszlop *vagy* bázisoszlop *a neve.*

[3] Lineáris egyenletrendszerek felírása és megoldása már időszámításunk előtt 300 körül babiloni iratokban szerepelt. Az első századra teszik a kínai Jiǔzhāng Suànshù című mű megjelenését, mely az előző ezer évben összegyűlt matematikai tudást foglalja össze (címének magyar fordítása „A matematikai művészet kilenc fejezete" vagy „Kilenc fejezet a matematikai eljárásokról" lehet). E műben már a kiküszöbölés (azaz a Gauss-elimináció) néven ismert technikát alkalmazzák lineáris egyenletrendszer megoldására. A két fenti műben szereplő egyenletrendszerek, és további történeti részletek olvashatók a The MacTutor History of Mathematics archive című weboldalon.

2.34. PÉLDA (LÉPCSŐS ALAK). *A következő mátrixok lépcsős alakúak:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer A *Gauss-módszer* vagy más néven *Gauss-kiküszöbölés* vagy *Gauss-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.27. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.35. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \overset{S_2\leftrightarrow S_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \overset{S_4-\frac12 S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac32 & 3 \end{array}\right] \overset{S_4-\frac32 S_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z = -2$, ezt a másodikba helyettesítve $y = 3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$, azaz az egyetlen megoldás $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. □

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változóit, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változónak* nevezzük.

2.36. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\ \ x_3+2x_4+\ \ x_5&=1\\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4+\ \ x_5&=0\\ 3x_1+6x_2+7x_3+8x_4+3x_5&=1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&2&1&1\\ 1&2&3&3&1&0\\ 3&6&7&8&3&1 \end{array}\right] \overset{S_2-S_1}{\underset{}{\overset{S_3-3S_1}{\Longrightarrow}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&2&1&1\\ 0&0&2&1&0&-1\\ 0&0&4&2&0&-2 \end{array}\right] \overset{S_3-2S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&2&1&1\\ 0&0&2&1&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x_1+2x_2+\ \ x_3+2x_4+x_5&=\ \ 1\\ 2x_3+\ \ x_4\qquad&=-1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3. A szabad változók: x_2, x_4, x_5. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3-at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1-et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u\\ x_3 &= -\frac{1}{2}\qquad\ -\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

. Innen az egyenletrendszer megoldása

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u,s,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,t,u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u\\ s\\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\ t\\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen az utóbbi – vektorok lineáris kombinációjára bontással való – felírás lesz hasznos. □

Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásnak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0$, $t = 1$, $u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Ez vajon mindig sikerül?

2.37. TÉTEL (LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Bármely mátrix elemi sorműveletekkel* lépcsős *alakra hozható.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i-edik sorának j-edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.
3. Vegyük az i-edik sort $i = 2$-től $i = m$-ig, és ha a sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$-szeresét adjuk hozzá. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek 0-vá válnak.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához. □

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren* azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénből a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.38. PÉLDA (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg a 2.36. példabeli egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

MEGOLDÁS. Mivel homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, a megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa csak nullákból áll, így az elemi sorműveletek alatt nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.36. példa megoldásában, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne, csak a konstans tagok nem szerepelnek:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejthető kapcsolatára még visszatérünk a 3.17. tételben. □

Végül egy alkalmazás:

2.39. PÉLDA (SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{S_2-3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x+y+\ z &= \ \ 1 \\ y-3z &= -1 \end{aligned}$$

Ebből $z = t$ paraméterválasztással $y = -1 + 3t$ és $x = 2 - 4t$, azaz

$$(x, y, z) = (-4t + 2, 3t - 1, t) = (2, -1, 0) + t(-4, 3, 1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ □

Redukált lépcsős alak A 2.27. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is kinulláztunk minden elemet.

2.40. DEFINÍCIÓ (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). *Egy mátrix* redukált lépcsős, *vagy* redukált sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő feltételeket:*

1. *lépcsős alakú;*
2. *minden főelem egyenlő* 1*-gyel;*
3. *a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem* 0*;*

A főelemet itt vezéregyesnek *vagy* vezető egyesnek *is szokás nevezni.*

2.41. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). *A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Minden valós, vagy racionális elemű mátrix redukált lépcsős alakra hozható, azonban az egészegyütthatós mátrixok általában nem, ha az egészeken belül akarunk maradni. De az egészegyütthatós mátrixok is redukált lépcsős alakra hozhatók a racionálisok számkörében. Az kiküszöbölés lépéseinek követésére használható a SagePlayer redukált lépcsős alak című szemléltető munkalapja.

2.42. példa (Redukált lépcsős alakra hozás). *Hozzuk redukált lépcsős alakra az*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

Megoldás. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1\\S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3+4S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_1-3S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egy másik lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_1\leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1\\S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_1-3S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bár különböző úton, de mindkétszer azonos eredményre jutottunk. Valóban, hamarosan be fogjuk látni, hogy a redukált lépcsős alak egyértelmű, míg e példából is látjuk, hogy a lépcsős alak nem: a megadott mátrixnak a megoldás során négy különböző lépcsős alakját is előállítottuk. □

Gauss – Jordan-módszer A *Gauss – Jordan-módszer*, más néven *Gauss – Jordan-kiküszöbölés* vagy *Gauss – Jordan-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel *redukált* lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél bemutatott egyenletrendszerekre.

2.43. példa (Gauss – Jordan-módszer, egy megoldás). *Oldjuk meg a 2.35. példában felírt egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!*

Megoldás. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.35. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk, először beszorozzuk a sorokat a főátlóbeli elem reciprokával, majd a harmadik oszlopot, végül a másodikat kinullázzuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&2&3&2\\1&3&3&4\\1&2&1&5\end{array}\right]\overset{\dots}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]\overset{\substack{1/2S_2\\-S_3}}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&\frac{1}{2}&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\overset{\substack{S_2-\frac{1}{2}S_3\\S_1-2S_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\overset{S_1-S_2}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{aligned}x\quad&=1\\y\quad&=3\\z&=-2\end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x,y,z)=(1,3,-2)$. □

2.44. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.36. példabeli*

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+\ \ x_3+2x_4+\ \ x_5&=1\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4+\ \ x_5&=0\\3x_1+6x_2+7x_3+8x_4+3x_5&=1\end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. A 2.36. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\1&2&3&3&1&0\\3&6&7&8&3&1\end{array}\right]\overset{\dots}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\0&0&2&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\overset{\substack{1/2S_2\\S_1-S_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&3/2&1&3/2\\0&0&1&1/2&0&-1/2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{aligned}x_1+2x_2\quad+\frac{3}{2}x_4+x_5&=\frac{3}{2}\\x_3+\frac{1}{2}x_4\qquad&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Végezzük el az $x_2=s$, $x_4=t$, $x_5=u$ helyettesítést, az x_1 és x_3 változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u,s,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,t,u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u\\s\\-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\t\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.36. példában. □

A redukált lépcsős alak egyértelműsége Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.45. tétel (A redukált lépcsős alak egyértelmű). *Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$. Tehát $\hat{\mathbf{R}} \neq \hat{\mathbf{S}}$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{9} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az oszlop, melyben különböznek, nem lehet az első oszlop, mert ha az a zérusvektor az egyik mátrixban, akkor a sorekvivalencia miatt a másikban is az lenne, egyébként pedig ez az oszlop mindenképp az első helyen 1-est, alatta 0-kat tartalmaz.

Tekintsük az így kapott $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

és

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. (E bizonyítás Holzmann[4] Interneten publikált cikkén alapul). □

[4] Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf, 2002

Mivel a redukált lépcsős alak egyértelmű, definiálhatunk egy függvényt, mely minden mátrixhoz annak ezt az alakját rendeli. Az $\operatorname{rref}(\mathbf{A})$ jelölést mi arra a függvényre fogjuk alkalmazni, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli. Például

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Szimultán egyenletrendszerek Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

2.46. DEFINÍCIÓ (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK). *Több egyenletrendszer halmazát* szimultán egyenletrendszernek *nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.*

2.47. példa (Szimultán egyenletrendszer megoldása). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!*

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=3 \qquad & u+\ \ v+\ \ w&=3 \qquad & r+\ \ s+\ \ t&=0\\ 2x+3y+2z&=7 & 2u+3v+2w&=7 & 2r+3s+2t&=0\\ 2x+2y+3z&=6 & 2u+2v+3w&=7 & 2r+2s+3t&=1 \end{aligned}$$

Megoldás. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss – Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-2S_1\\ S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_1-S_2\\ S_1-S_3}}{\Longrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

és ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u\\ v\\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r\\ s\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$ □

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.48. példa (Szimultán egyenletrendszer bővített mátrixa). *Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

MEGOLDÁS. A Gauss – Jordan-módszer lépései:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2-\frac{5}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

□

*Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$-ben** Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss – Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még a 478. oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.49. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_2$ FÖLÖTT). *4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d. Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen a $b+c+d$, $a+c+d$ és $a+b+d$ bitet Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a 0110 kódszó helyett a 0110011 kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az a $(?,?,?,?,1,0,1)$ kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?*

MEGOLDÁS. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b+c+d&=1\\ a+\quad c+d&=0\\ a+b+\quad d&=1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss – Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$-ben $1+1=0$, így $1=-1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1+S_3]{S_2+S_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} a\quad +c\quad &=0\\ b+c\quad &=1\\ d&=0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d=0$. A szabad változó c, legyen $c=s$. Így a második egyenletből $b=1+c$, azaz $b=1+s$ és az elsőből $a=c$, azaz $a=s$. A megoldás általános alakban $(a,b,c,d)=(s,1+s,s,0)$, azaz

$(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s = 0$ és az $s = 1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet $[7, 4, 3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bitje egyértelműen meghatározza a maradék hármat. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható. □

2.50. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT). *Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \qquad & 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 4 \qquad & 3x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk a 478. oldalon található A.8. ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \xRightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \xRightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azaz az egyenletrendszernek több megoldása van. Itt ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y, legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}_5$$

Mivel $\mathbb{Z}_5$-nek öt eleme van, ezért s-nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$. A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xRightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xRightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right],$$

amiből $2y = 4$, azaz $y = 2$, $x + 4 \cdot 2 = 3$, azaz $x = 0$. Tehát a megoldás $(x, y) = (0, 2)$. □

Feladatok

2.15.• LÉPCSŐS ALAK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nemzérus sor van.

b) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi főoszlop (bázisoszlop) van.

c) Minden valós mátrixnak van lépcsős alakja, ami egyértelmű.

d) Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk.

e) Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

2.16.• EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.

b) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes.

c) Ha egy valósegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.

d) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

2.17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2.18. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

2.19. $\left\{\begin{aligned} 3x+2y-2z &= 1 \\ 2x+3y-3z &= -1 \\ 4x+2y &= 8 \end{aligned}\right.$ $\qquad \left\{\begin{aligned} 2x+2y-2z &= 0 \\ 3x+3y-2z &= 3 \\ 5x-3y+2z &= 5 \end{aligned}\right.$

2.20. $\left\{\begin{aligned} 2x+3y+5z &= 0 \\ 3x+2y+2z &= 3 \\ 5x -4z &= 9 \end{aligned}\right.$ $\qquad \left\{\begin{aligned} x-y-3z &= 3 \\ 5x+5y+7z &= 3 \end{aligned}\right.$

2.21. Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ *b)* $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2.22. SORMŰVELETEK REVERZIBILITÁSA Mutassuk meg, hogy minden elemi sorművelettel átalakított mátrixhoz van egy olyan sorművelet, mely azt visszaalakítja.

Megoldás a gyakorlatban

Bár e szakasz tartalma elsősorban nem a lineáris algebra, hanem a numerikus analízis témakörébe tartozik, ismerete elengedhetetlen annak, aki a gyakorlatban lineáris algebrai eszközöket alkalmaz. Először a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés műveletigényét, majd numerikus megbízhatóságának kérdését vizsgáljuk. Ezután az iterációs módszerek lényegét vázoljuk, melyek alkalmazásakor az együtthatómátrix nem változik, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el", mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

A kiküszöbölés műveletigénye Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. A flop mértékegységről részletesen a függelékben írunk a 471. oldalon.

2.51. TÉTEL (A KIKÜSZÖBÖLÉS MŰVELETIGÉNYE). *A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt*

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6} \quad \textit{összeadás/kivonás,} \quad \frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \quad \textit{szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n\,\textit{flop},$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ *flop.*

BIZONYÍTÁS. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás és $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadásból és $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ szorzásból áll. Ha a Gauss–Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás mellett $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra bízzuk. □

Numerikusan instabil egyenletrendszerek A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.52. PÉLDA (INSTABIL EGYENLETRENDSZER). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 6.73x - 8.97y &= 5.61 \\ 4.79x - 6.39y &= 3.99 \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01*-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!*

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját újra mérjük, és másodszorra egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől: $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Újabb mérés az y együtthatóját -8.96-nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől: $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$\begin{aligned} 6.72x - 8.96y &= 5.60 \\ 4.80x - 6.40y &= 4.00 \end{aligned}$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorosa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk. □

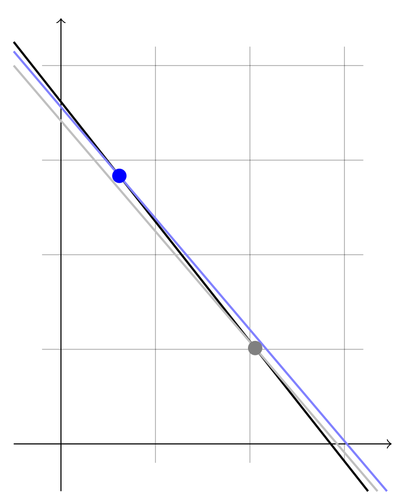
Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabilnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a 2.12. ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel" van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem" lineá-



2.12. ábra: Instabil egyenletrendszer, melyben az egyenletek együtthatóinak kis megváltoztatása a megoldás nagy megváltozását okozza.

ris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

Részleges főelemkiválasztás A következő példákban lebegőpontos aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.53. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL). *Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.*

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Pontosan számolva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2 - 10^4 S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right]$$

amiből az eredmény $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe o-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x = y = 2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2 - 10^4 S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

ahol a közelítésnél a $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x = 0$, $y = 2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{S_2 - 10^{-4} S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+10^{-4} & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

amelynek megoldása $x = y = 2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! □

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis repciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

És ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazható egy széles körben elterjedt szabály: a Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek! E módszert *részleges főelemkiválasztásnak*, illetve *részleges pivotálásnak* nevezik.

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.54. példa (Részleges főelemkiválasztás). *Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!*

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az első oszlop legnagyobb eleme a harmadik sorban van, így az első és a harmadik sor cseréjével kezdünk:

$$\overset{S_1\leftrightarrow S_3}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2\\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8\\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5\\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2\end{bmatrix}\overset{\substack{S_2-S_1/2\\ S_3-S_1/4\\ S_4-S_1/3}}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2\\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2\\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2\\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8\end{bmatrix}$$

$$\overset{S_1\leftrightarrow S_3}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2\\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8\\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2\\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2\end{bmatrix}\overset{\substack{S_3-S_2/2\\ S_4-S_2/3}}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2\\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6\end{bmatrix}$$

$$\overset{S_3\leftrightarrow S_4}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2\\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8\end{bmatrix}\overset{S_4-S_3/2}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2\\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{2.0}\end{bmatrix}$$ □

Skálázás A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen beszorozzuk?

2.55. PÉLDA (SOR SZORZÁSA). *A 2.53. példában szorozzuk meg az első egyenletet 10^5-nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.*

$$\begin{aligned} 10x + 10^5 y &= 2\cdot 10^5\\ x - \quad y &= \quad 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right]\overset{S_2-10S_1}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5\\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2\\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4\end{array}\right],$$

amiből $x = 0$ és $y = 2$. □

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben 10^6-nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenetlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a *skálázás* nevű gyakorlati módszer ajánlható. Ez a következő két skálázási szabály követéséből áll, mely a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együtthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így $\mathbf{A}$ minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekre a következőkben ismertetendő iteratív módszerek általában jobb eredményt adnak.

Iteratív módszerek A továbbiakban is csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek n-ismeretlenesek és n egyenletből állnak, tehát melyek együtthatómátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b-a|, \text{ azaz } \frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} \le \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb $1/2$. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan $\bar{x}$ pont létezik, hogy $\bar{x} = f(\bar{x})$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

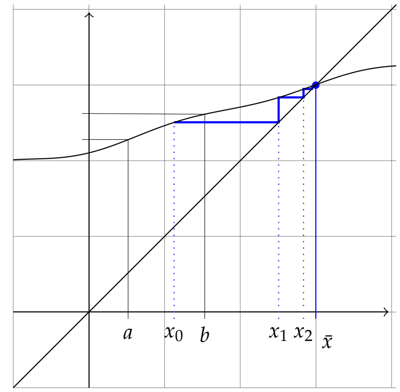
$$x_0, \ x_1 = f(x_0), \ x_2 = f(x_1), \ldots, \ x_{k+1} = f(x_k), \ldots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

A 2.13. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az $1/2$-es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A Banach fixponttétel könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.



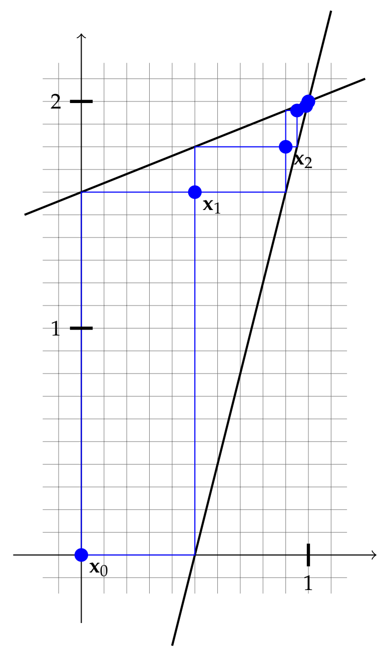
2.13. ábra: Egy függvény, mely bármely a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele, így a függvény minden különbségi hányadosa abszolút értékben legföljebb $1/2$. E függvénynek pontosan egy fixpontja van, mely megkapható egy tetszőleges x_0 pontból induló $x_k = f(x_{k-1})$ sorozat határértékeként.

Jacobi-iteráció Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.56. példa (Jacobi-iteráció). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, majd hozzuk $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakra, és egy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ vektorból indulva végezzünk az $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?



2.14. ábra: A Jacobi-iteráció szemléltetése

Megoldás. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = f(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right])$ alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az x-et, a másodikból y-t kifejezzük:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}_0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}_1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensnek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. □

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

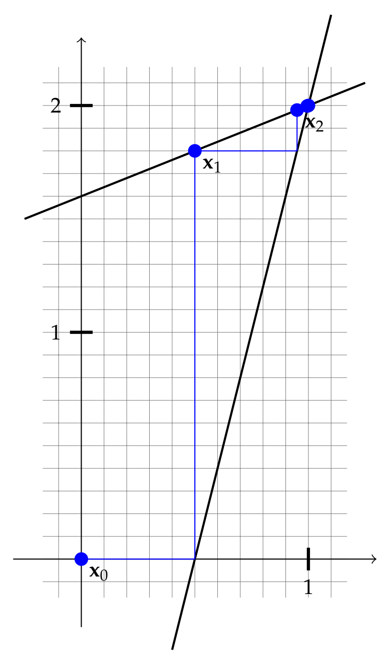
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k-adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 \qquad\qquad - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 \qquad\qquad - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\ \vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} \qquad\qquad) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}_0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. A (2.25) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}_0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}_1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$,... vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss – Seidel-iteráció A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.25) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss – Seidel-iterációnak*.



2.15. ábra: A Gauss – Seidel-iteráció szemléltetése

2.57. PÉLDA (GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - \ \ y &= \ \ 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss – Seidel-iterációval.

MEGOLDÁS. Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ kezdőérték után az $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$ értékek következtek, a Gauss–Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt $x = \frac{1}{2}$ értéket helyettesítjük, azaz $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. □

Mindkét iteráció jól szemléltethető a 2-ismeretlenes esetben. A 2.14. és a 2.15. ábrák ezt mutatják. Ha pontosan számolunk, végtelen sok pontot kapunk, az ábrák csak néhány pontot mutatnak.

Az iterációk konvergenciája A fenti példákból nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.58. PÉLDA (DIVERGENS ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg Jacobi- és Gauss–Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \\ y &= 2x - 5 \end{aligned}$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss–Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	
x	0	2	1	-1	-5	-13
y	0	-1	-3	-7	-15	-31

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! □

2.59. DEFINÍCIÓ (SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX). *Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix* soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik, *vagy* soronként (szigorúan) domináns főátlójú, *ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben*

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &> && |a_{12}| + \ldots + |a_{1,n-1}| + |a_{1n}| \\
|a_{22}| &> |a_{21}| && + \ldots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\
&\vdots && \ddots \qquad\qquad \vdots \\
|a_{n-1,n-1}| &> |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \ldots && + |a_{n-1,n}| \\
|a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{n,n-1}|
\end{aligned}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

Világos, hogy az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 2x - 5y &= -17 \end{aligned}$$

2.60. TÉTEL (ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA). *Ha az n egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iteráció is konvergens.*

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss–Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.24. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek” témában írt könyveket, web-oldalakat.

Feladatok

Jacobi-iteráció

2.23. Oldjuk meg a

$$
\begin{aligned}
4x - y &= 8 \\
2x - 5y &= -5
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

Vegyes feladatok

2.24. **Jacobi-iteráció konvergál, Gauss–Seidel-iteráció nem** Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$
\begin{aligned}
x \phantom{{}+5/6y} &+ z = 0 \\
-x + 5/6y \phantom{{}+z} &= 0 \\
x + 2y &- 3z = 1
\end{aligned}
$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss–Seidel-iteráció nem.

2.25. **Gauss-elimináció domináns főátlójú mátrixon** Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

2.26. **Az iterációk szemléltetése** A A városból elindul egy A jelű vonat a B város felé, vele egyidőben a B városból egy B jelű A felé. A B vonat indulásával egyidőben a B vonat orráról elindul egy légy is A felé, de amint találkozik az A vonattal megfordul, és addig repül, míg a B vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a B vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x: távolság A-tól	0	40	48	49.6
y: távolság B-től	0	80	96	99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

2. Milyen messze van A város B-től, ha a légy sebessége 200 km/h?
3. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a léggyel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x: távolság A-tól		30		46		49.2	
y: távolság B-től	0		80		96		99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

4. Milyen messze van A város B-től, ha a légy sebessége 200 km/h?
5. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációhoz?

Megoldások

2.1. Ide a megoldást!

2.2. *a)* igen, *b)* igen, *c)* nem, *d)* igen, *e)* igen, *f)* nem.

2.3. Könnyen látható, hogy mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x=2$, $y=1$, tehát a két egyenletrendszer ekvivalens.

2.4. Az első egyenletrendszer nem oldható meg a $0=3$ alakú egyenlet miatt, de a második sem, hisz nincs olyan x és y, melyre $x+y=2$ és $x+y=7$ lenne, hisz $2\neq 7$.

2.5. Behelyettesítés után mindkét egyenlet $0=0$ alakú, amit tetszőleges x és y kielégít, így az összes (x,y) számpár megoldása az egyenletrendszernek.

2.6. $x=1$, y tetszőleges, azaz az összes $(1,y)$ alakú számpár megoldás.

2.7. A második egyenlet behelyettesítés után $0=1$ alakú, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2.8. $x=1$, $y=2$, azaz $(x,y)=(1,2)$ az egyetlen megoldás.

2.10. *a)* A sormodellben két metsző egyenest kell megrajzolni ($y=7/3x-2/3x$, $y=-2+3/2x$), melyek a $(2,1)$ pontban metszik egymást, míg az oszlopmodellben a $(2,3)$, a $(3,-2)$ vektorokat és azok lineáris kombinációjaként előállított $(7,4)=2(2,3)+(3,-2)$ vektort!

b) A sormodellben két párhuzamos egyenest kell megrajzolni, míg az oszlopmodellben a $(2,3)$ és a $(4,6)$ vektorokat, melyek egy egyenesbe esnek, és semmilyen lineáris kombinációjuk sem adja ki a $(3,4)$ vektort!

2.11. A három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos, másrészt a normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis $2(1,1,2)+(1,2,4)=(3,4,8)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan vektor, mely mindhárom síkkal párhuzamos. Az első esetben a három sík egy egyenesen megy át, mivel van a síkoknak közös pontjuk, pl. a $(3,0,0)$ pont, így végtelen sok megoldása is van, míg a második esetben a síkoknak nincs közös pontjuk.

Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}z=\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x+y-z=0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a $(3,3,9)$ vektor is benne van e síkban, a $(3,3,1)$ vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem.

2.12. A sormodell szerinti ábra az *a)* esetben 3 síkbeli egyenest tartalmaz, melyek közt van két párhuzamos, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* esetben a három egyenes egy ponton megy át, ez a megoldás: $x=2$, $y=1$. A *c)* esetben ugyan nincsenek párhuzamos egyenesek, de nincs közös pontjuk sem, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Az oszlopmodell szerint az *a)*

$$\begin{aligned}x+\ \ y&=3\\x+\ \ y&=4\\x+2y&=4\end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}.$$

Az $(1,1,1)$ és az $(1,1,2)$ vektorok benne fekszenek az $x=y$ egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A $(3,4,4)$ vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* és *c)* egyenletrendszerekben a bal oldali két vektor, az $(1,1,1)$ és az $(1,2,3)$ az $x-2y+z=0$ egyenletű síkban van, melyben a $(3,4,5)$ vektor benne van, míg a $(3,3,5)$ vektor nincs benne, tehát *b)* megoldható, *c)* nem.

2.13. *a)* hamis, az állítás csak úgy igaz, ha a párhuzamos hipersíkok különbözőek is (két azonos hipersíkot párhuzamosnak tekintünk), *b)* hamis, például a 2.9. *(a)* ábrán látható esetben nincsenek párhuzamos síkok, és mégsincs megoldás, *c)* igaz, mert akkor a jobb oldalon álló bármely vektor kifejezhető e két kétdimenziós vektor lineáris kombinációjaként, tehát az egyenletrendszer megoldható.

2.14.

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **három**dimenziós térben **két** darab **síkból** áll, melyek ha **párhuzamosak, de nem azonosak**, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma **végtelen**. Oszlopmodellje a **két**dimenziós térben **négy** darab **vektorból** áll (három lineáris kombinációja a negyedik).

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **két**dimenziós térben **három egyenesből** áll, míg az oszlopmodellje a **három**dimenziós térben **három** darab **vektorból**.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra az **öt**dimenziós térben **négy** darab **hipersíkból** áll. Oszlopmodellje a **négy**dimenziós térben **hat** darab **vektorból** áll.

2.15. *a)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *b)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *c)* Hamis, van lépcsős alakja minden mátrixnak, de csak a redukált lépcsős alak egyértelmű. *d)* Hamis. *e)* Igaz.

2.16. *a)* Igaz. *b)* Hamis, az egyenletrendszer megoldhatósága nem függ az egyenletek számától. Az ismeretlenek számánál akár kevesebb, akár több egyenletből álló rendszer akár konzisztens, akár inkonzisztens is lehet. *c)* Igaz. *d)* Igaz, a nullvektor mindig megoldás.

2.17. $\begin{bmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

2.18. $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&-1\end{bmatrix}$

2.19. Igen, mindkettőnek $(x,y,z)=(1,2,3)$ az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazaik megegyeznek.

2.20. Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix}1&0&-0.8&1.8\\0&1&2.2&-1.2\end{bmatrix}$$

2.21. *a)*Igen. *b)*Nem.

2.22. Az $S_i \leftrightarrow S_j$ művelet eredményét önmaga visszaállítja, az cS_i műveletét $\frac{1}{c}S_i$, és az $S_i + cS_j$ műveletét $S_i - cS_j$.

2.23. Legyen $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Az iteráció képletei:

$$x = \frac{y+8}{4}, \quad y = \frac{2x+5}{5}.$$

Az iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$
x	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
y	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépéseinek táblázata 4 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
y	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

2.25.

2.26. A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a k-adik találkozásából kiszámítva a $k+1$-edik találkozásra jellemző távolságokat, az $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cy_k + d$ egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és a, b, c és d értékre megoldva az

3
Megoldhatóság és a megoldások tere

E fejezetet az egyenletrendszer megoldásainak jellemzésére szánjuk. Ennek során megismerkedünk az altér fogalmával és a velük végezhető legegyszerűbb műveletekkel. Végül megmutatjuk, hogy minden konzisztens lineáris egyenletrendszer origóhoz legközelebbi megoldása az egyetlen, mely a sortérbe esik, és bármely két megoldásának különbsége merőleges rá.

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai

Az előzőekben a megoldások megtalálásának módszereit tanulmányoztuk. E szakaszban a megoldhatóság kérdését és a megoldások halmazának legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk. A vizsgálatokban a lineáris egyenletrendszerek mindkét geometriai interpretációja fontos szerepet kap.

Kötött változók száma, mátrix rangja A redukált lépcsős alak egyértelműségének egy nyilvánvaló, de fontos folyománya az alábbi eredmény:

3.1. KÖVETKEZMÉNY (FŐELEMEK OSZLOPAI). *Egy valós mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.*

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy bármely lépcsős alak főelemeiből kapjuk a redukált lépcsős alak vezéregyeseit, így bármely lépcsős alak főelemei ugyanott vannak, ahol a vezéregyesek, a redukált lépcsős alak pedig egyértelmű.

Ebből az is következik, hogy bármely valós mátrix esetén

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{bármely lépcsős}\\ \text{alak főelemeinek}\\ \text{száma}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{bármely lépcsős}\\ \text{alak nemzérus}\\ \text{sorainak száma}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{a redukált lépcsős}\\ \text{alak vezéregye-}\\ \text{seinek száma.}\end{array}}$$

Ez a következő definícióhoz vezet.

3.2. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX RANGJA). *Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix* rangjának *nevezzük. Az* $\mathbf{A}$ *mátrix rangját* $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ *jelöli.*

3.3. PÉLDA (MÁTRIX RANGJÁNAK KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az első és második mátrix lépcsős alakú, rangjuk azonnal leolvasható: 1 és 2. A harmadik és negyedik mátrix elemi sorműveletekkel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozható, tehát a rang 4, illetve 2. □

3.4. ÁLLÍTÁS (KÖTÖTT ÉS SZABAD VÁLTOZÓK SZÁMA). *Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, és együtthatómátrixának rangja r, akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma r, a szabad változók száma $n - r$.*

► Megjegyezzük, hogy egyelőre csak annyit látunk, hogy ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja r, akkor az egyenletrendszernek *van olyan megoldása*, amelyben a kötött változók száma r, a szabad változóké $n - r$, és egy ilyen megoldás megkapható a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel. Arról még nem tudunk semmit, hogy a változók sorrendjének felcserélésével, vagy más megoldási módszerrel nem kaphatunk-e más megoldást. A következő fejezetben be fogjuk látni, hogy a kötött és szabad változók száma független a változók sorrendjétől, sőt a megoldás módszerétől is.

► Például a

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszerben 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele Tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor *nem* oldható meg, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának van olyan sora, melyben csak a legutolsó elem nem nulla. Ez ugyanis egyenletté visszaírva $0 = c$ alakú, ahol $c \neq 0$, és ennek az egyenletnek nincs megoldása. Ez viszont azt jelenti, hogy ilyenkor a bővített mátrix rangja nagyobb az együtthatómátrix rangjánál. E megállapítás azonnali következménye a következő tétel.

3.5. TÉTEL (A MEGOLDHATÓSÁG MÁTRIXRANGOS FELTÉTELE). *Legyen egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa* $\mathbf{A}$, *a konstans tagokból álló vektora* $\mathbf{b}$.

1. *Ez az egyenletrendszer* pontosan akkor oldható meg, *ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik, azaz*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. *Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg* egyértelműen, *ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, azaz*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

BIZONYÍTÁS. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában nincs olyan sor, melynek csak az utolsó eleme nem 0. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

A második állítás abból következik, hogy az egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és nincs szabad változója, vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával. □

Az előzőekből az is adódik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egynél több megoldása, ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n.$$

(Miért nem lehet $\mathrm{r}(\mathbf{A}) > n$?)

Egy valós együtthatós egyenletrendszernek csak úgy lehet egynél több megoldása, ha van szabad változója. Viszont, annak minden értékéhez egy-egy másik megoldás tartozik, vagyis ekkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Így, ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor a megoldások száma, a két rang és az ismeretlenek száma közt a következő a kapcsolat:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	0
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) < n$	∞

Ha az egyenletrendszer homogén lineáris, azaz mindegyik konstans tag 0, akkor az elemi sorműveletek közben a bővített mátrix utolsó oszlopában minden elem 0 marad, így ebben az oszlopban biztosan nem lesz főelem. Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszerek mindig megoldhatók, hisz ekkor a $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ összefüggés mindig fönnáll. A megoldhatóság persze e feltétel ellenőrzése nélkül is látszik, hisz az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ mindig megoldás! Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ megegyezik a redukált lépcsős alak főelemeinek számával, ezért $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq m$ és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq n$ is fönnáll, ahol m az egyenletek, n az ismeretlenek száma. Így viszont $m < n$ esetén $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$ nem állhat fönn, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek van az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektoron kívül is megoldása. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

3.6. TÉTEL (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). *Az* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, mert a nullvektor – az ún.* triviális megoldás *– mindig megoldás. Pontosan akkor van* nemtriviális, *vagyis a* $\mathbf{0}$*-vektortól különböző megoldása is, ha*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ *oszlopainak – számát jelöli. Speciálisan, az m egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszernek $m < n$ esetén mindig van nemtriviális megoldása.*

Valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerekre az előző táblázat a következő alakot ölti:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$	∞

3.7. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMA). *Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek* 0, 1, *illetve* ∞ *sok megoldása?*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Hozzuk a bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-aS_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right] \overset{S_3+S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array}\right]$$

Látható, hogy $a = 1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, tehát az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja is 1, így az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlettel ekvivalens. Ennek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$, azaz oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $a = -2$, akkor az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg (az utolsó sor egyenletté visszaírva $0 = 3$ alakú). Minden egyéb esetben, azaz ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor a két rang 3, ami megegyezik az ismeretlenek számával, tehát egyetlen megoldás van. Ez ki is fejezhető:

$$x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = -\frac{a+1}{a+2}. \qquad \square$$

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Tekintsünk egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert. Mint a 3.6. tételben láttuk, ez biztosan megoldható, és a megoldások halmazában a nullvektor benne van. Mit mondhatunk a megoldások halmazáról, ha több megoldása is van a homogén egyenletrendszernek?

3.8. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA). *Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.*

BIZONYÍTÁS. Elég az állítást két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0},$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás, ugyanis

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \ldots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) \\ =&(c\mathbf{a}_1 x_1 + d\mathbf{a}_1 y_1) + (c\mathbf{a}_2 x_2 + d\mathbf{a}_2 y_2) + \ldots + (c\mathbf{a}_n x_n + d\mathbf{a}_n y_n) \\ =&c(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n) \\ =&\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

azaz $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat.

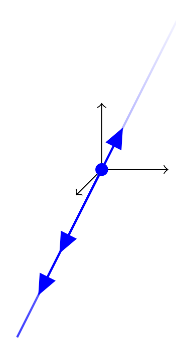
E bizonyítás az oszlopmodellre épült, de hasonlóan egyszerű bizonyítás adható a sormodellben is (ld. 3.6. feladat). $\square$

Altér Az, hogy vektorok egy H halmaza olyan, hogy a H-beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind H-ban vannak, azzal ekvivalens, hogy bármely H-beli vektor skalárszorosa és bármely két H-beli vektor összege is H-beli (ld. a **??** feladatot). Másként fogalmazva: a vektorok skalárral való szorzása és a vektorok összeadása nem vezet ki H-ból.

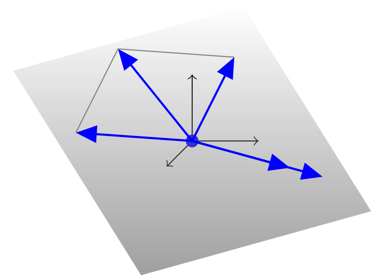
Az $\mathbb{R}^n$ tér ilyen típusú részhalmazai igen fontosak. Például a síkban egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) ilyenek. Hasonlóképp, a térben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai ilyenek (ld. a 3.1. ábra). Ez a következő definícióhoz vezet.

3.9. DEFINÍCIÓ (ALTÉR). *Az $\mathbb{R}^n$ tér vektorainak olyan részhalmazát, mely zárt a vektorok skalárral való szorzásának és a vektorok összeadásának műveletére, az $\mathbb{R}^n$* alterének *nevezzük. Képlettel kifejezve: a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz $\mathbb{R}^n$* altere, *ha*

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ *esetén* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$,
2. $\mathbf{u} \in H$, *és* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* $c\mathbf{u} \in H$.



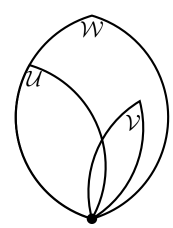
a)



b)

3.1. ábra: *a)* Egy origón átmenő egyenes bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege az egyenesbe esik, *b)* egy origón átmenő sík bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege a síkba esik.

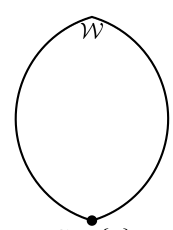
Az $\mathbb{R}^2$ vagy az $\mathbb{R}^3$ altereit könnyen tudjuk szemléltetni, ahogy azt a 3.1. ábrán is tettük. De hogyan szemléltethetők $\mathbb{R}^n$ alterei? Természetesen itt csak egy leegyszerűsítő, az elemibb összefüggések szemléltetésére használható ábrázolás jöhet szóba. A Venn-diagramok példáját követjük: az ábrázolás alakjának nem „hasonlítania” kell az ábrázolt dologra, csak tudnunk kell, hogy annak melyik tulajdonságát hogyan szemlélteti. Vektorterekre a *levéldiagramot* fogjuk használni. Ez egy egyszerű levélformával szemlélteti a teret, melynek a levél száránál lévő töve jelzi a nullvektort. Az altereket olyan kisebb levelek szemléltetik, melyek töve – azaz a nullvektor – közös (ld. 3.2. ábra). A levelek felső csúcsába a tér nevét vagy dimenzióját írhatjuk.



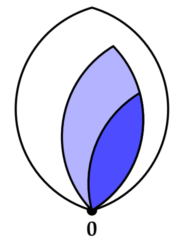
3.2. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér és annak $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ alterei, valamint a mindannyiukban közös nullvektor

Felsoroljuk az alterek néhány egyszerűen belátható tulajdonságát:

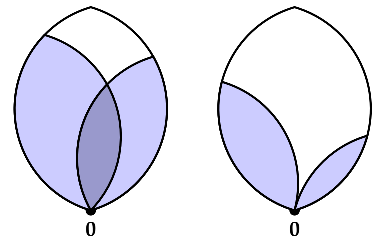
- Minden altérnek eleme a nullvektor, hisz ha egy $\mathbf{x}$ vektor eleme az altérnek, akkor $-\mathbf{x}$ is és e két vektor összege is, azaz $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. (Bizonyíthatunk úgy is, hogy bármely altérbeli vektorral együtt annak 0-szorosa is, vagyis a $\mathbf{0}$-vektor is eleme az altérnek.)
- Minden vektortér maga is altér, hisz bármely két vektorának összes lineáris kombinációját is tartalmazza.
- A nullvektor önmagában alteret alkot, ez a *zérustér*, amit $\mathcal{Z}$ jelöl. A nulltér kifejezést másra használjuk, ne keverjük össze. A zérusteret és a teljes teret szokás triviális altereknek nevezni (ld. 3.3. ábra).
- Altér altere is altér (ld. 3.4. ábra).
- Két altér metszete is altér. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy vektortér két altere, és $\mathcal{W}$ a közös részük, akkor $\mathcal{W}$ nem üres, hisz a nullvektor benne van. Másrészt bármely két $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$ vektor összes lineáris kombinációja benne van $\mathcal{U}$-ban és $\mathcal{V}$-ben is, így metszetükben is. Alterek metszetére is a $\cap$



3.3. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér két triviális alterével: az egyik maga $\mathcal{W}$, a másik a nullvektort tartalmazó $\mathcal{Z}$ tér jelet használjuk, tehát az előbbi alterekre $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$ (ld. 3.5. ábra).



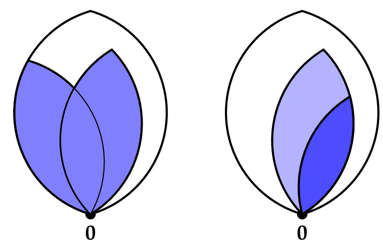
3.4. ábra: Altér altere is altér



3.5. ábra: Alterek metszete is altér, de az megeshet, hogy ez a metszet csak az egyetlen nullvektorból álló zérustér.

► Az előző gondolat tetszőleges számú altérre is megismételhető, tehát egy vektortér tetszőleges számú alterének közös része is altér. Az alterek száma végtelen is lehet.

► Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik altere a másiknak. Például a térben egy origón átmenő egyenes vektorait és egy origón átmenő sík vektorait egyesítve csak akkor kapunk alteret, ha az egyenes a síkba esik.



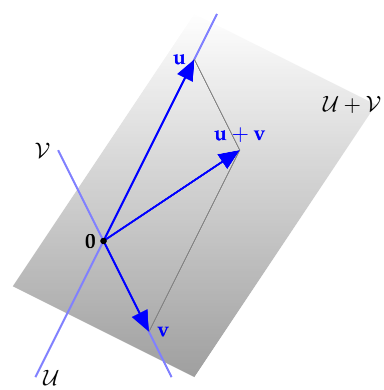
3.6. ábra: Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik a másik altere

Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ ugyanannak a vektortérnek az alterei, akkor az egyesítésük által generált alteret $\mathcal{U} + \mathcal{V}$-vel jelöljük, és a két altér összegének nevezzük.

3.10. ÁLLÍTÁS (ALTEREK ÖSSZEGE). *Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ altér két altere, akkor az egyesítésük által generált $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ altér pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli vektor összegeként előállnak.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ egy $\mathcal{U} + \mathcal{V}$-beli vektor, akkor előáll néhány $\mathcal{U}$- és $\mathcal{V}$-beli vektor lineáris kombinációjaként. De a lineáris kombináció $\mathcal{U}$-beli vektorokat tartalmazó része egy $\mathcal{U}$-beli $\mathbf{u}$ vektort ad, míg a többi egy $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{v}$ vektort, így $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Fordítva világos, minden $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakú vektor $\mathcal{U}$- és $\mathcal{V}$-beli vektorok lineáris kombinációja, tehát benne van $\mathcal{U} + \mathcal{V}$-ben. □

Szemléltetésül: ha például $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, és $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy-egy egymástól különböző 1-dimenziós altere, akkor az egyesítésük által generált 2-dimenziós altérbe pontosan azok a vektorok tartoznak, melyek egy $\mathcal{U}$-beli $\mathbf{u}$ és egy $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{v}$ vektor összegei (ld. 3.7 ábra).



3.7. ábra: $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ bármely vektora előáll $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakban

3.11. PÉLDA (ALTÉR). *Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?*

1. $\{ (x, y, z) \mid x = y,\ z = xy \}$,
2. $\{ (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$.

MEGOLDÁS. Az első halmaz nem altér, mert nem elégíti ki a definícióbeli feltételeket. Például az $(1, 1, 1)$ vektor benne van e halmazban, azonban kétszerese nem, mert nem elégíti ki a $z = xy$ egyenlőséget!

A második feladatban szereplő halmazban nincs benne a nullvektor, ugyanis az $s + 2t = 0$, $s - 1 = 0$, $2s + t = 0$ egyenletrendszernek nincs megoldása, így ez a halmaz sem alkot alteret! □

Hamarosan látni fogjuk, hogy $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. a sík összes vektora.

$\mathbb{R}^3$ alterei:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,

3. egy origón átmenő sík összes vektora,
4. a tér összes vektora.

Mivel egy egyetlen n-ismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldáshalmaza egy $\mathbb{R}^n$-beli hipersík, ezért az origón átmenő hipersíkok is alterek. Lássunk további példákat! A 3.8. állítás az altér fogalmát használva a következő alakot ölti:

3.12. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK ALTERE). *Egy n-ismeretlenes* homogén *lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.*

3.13. DEFINÍCIÓ (NULLTÉR). *Az* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az* $\mathbf{A}$ *mátrix* nullterének *nevezzük és* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$*-val jelöljük.*

Kérdés: általában hogyan adhatjuk meg $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges alterét?

Kifeszített altér A homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását néhány vektor lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A megoldások alterét tehát „generálja” vagy geometrikusabb szóhasználattal „kifeszíti” néhány megoldásvektor. Erre utal a következő definíció. Azt, hogy az altér szót a definícióban használhatjuk, a rákövetkező állítás bizonyítja.

3.14. DEFINÍCIÓ (KIFESZÍTETT ALTÉR). *A* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *vektorok összes*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációját a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *vektorok által* kifeszített altérnek *nevezzük, és* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$*-val jelöljük. Képletben:*

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = \{\, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k : c_1, c_2 \ldots, c_k \in \mathbb{R}\,\}.$$

Valóban, az elnevezés jogos:

3.15. ÁLLÍTÁS (A KIFESZÍTETT ALTÉR ALTÉR). *A* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *vektorok által kifeszített* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *vektorhalmaz* $\mathbb{R}^n$ *egy altere.*

BIZONYÍTÁS. Be kell látni, hogy $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ bármely vektorának skalárszorosa és bármely két vektorának összege is ide tartozik. Legyen

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k, \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$$

a $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k). \qquad \square$$

3.16. PÉLDA (NULLTÉR). *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterét. Keressünk véges sok olyan vektort, melyek kifeszítik e teret!

MEGOLDÁS. Az adott mátrix a 2.38. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza épp a nulltér vektoraiból álló halmaz. A nulltér vektorai tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alakba írhatók, amiből leolvasható, hogy e teret a megoldásban megadott három vektor feszíti ki. $\square$

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret. Legegyszerűbben ez onnan látszik, hogy a zérusvektor minden altérnek eleme, viszont egyetlen inhomogén egyenletrendszernek sem megoldása! Ugyanakkor az inhomogén lineáris egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásai közt egy igen fontos kapcsolat van.

3.17. TÉTEL (HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI). *Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldása megkapható úgy, hogy egy partikuláris megoldásához hozzáadjuk a hozzá tartozó homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldását.*

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén egy}\\ \text{partikuláris}\\ \text{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{homogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{array}}$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje az egyenletrendszer együtthatómátrixát $\mathbf{A}$, annak sorvektorait $\mathbf{a}_{1*}$, $\mathbf{a}_{2*}, \ldots, \mathbf{a}_{m*}$, és jelölje $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, a konstans tagok vektorát. Legyen $\mathbf{x}$ az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje H a homogén, I az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + H = I$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + H \subseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a H egy tetszőleges $\mathbf{y}$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} &= b_i, \\ \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} &= 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

egyenleteknek. Ebből

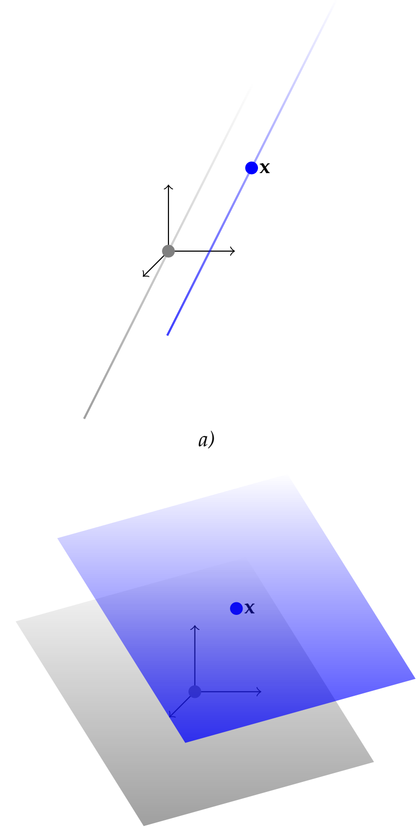
$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = b_i + 0 = b_i.$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in I$.

$\mathbf{x} + H \supseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in I$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in H$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i - b_i = 0.$$

fennáll minden $i = 1, 2, \ldots, m$ indexre, azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in H$. Ezzel kész a bizonyítás. □

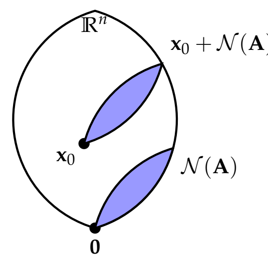


3.8. ábra: *a)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás egyparaméteres; *b)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás kétparaméteres.

E tétel azt jelenti, hogy ugyan az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza *nem altér*, de egy *altér eltoltja*. Az ilyen halmazokat geometriai nyelven *affin altereknek* is szokás nevezni. Eltolt altereket mutat a 3.8. ábra.

E tételt szemléltetik a 2.36. és a 2.38. példák is.

Ha általában szeretnénk ábrázolni az inhomogén egyenletrendszer megoldását a levéldiagramon, azt könnyen megtehetjük egy eltolt altér szemléltetésével, ahogy azt a 3.9. ábra mutatja.



3.9. ábra: Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén egyenletrendszer megoldása a nulltér, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, az inhomogéné e tér egy $\mathbf{x}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{A})$ eltoltja, ahol $\mathbf{x}_0$ az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása.

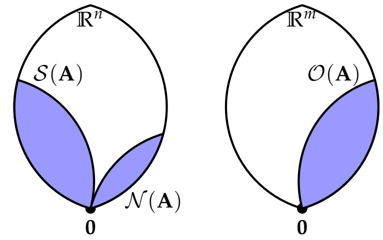
Az előző tétel szerint az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Fontos látnunk, hogy mindegy melyik megoldást választjuk az inhomogén megoldásai közül, bár az eltolás mértéke változik, az eredmény ugyanaz lesz. Ez jól leolvasható a 3.8 ábráról: ha az origón átmenő egyenes (sík) origónál lévő pontját nem $\mathbf{x}$-be, hanem az eltolt egyenes (sík) egy másik pontjába toljuk, ugyanahhoz az eltolt altérhez jutunk.

Az inhomogén $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret, de azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyre az egyenletrendszer megoldható, igen. Ezek ugyanis az oszlopmodell szerint épp azok a vektorok, melyek az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállnak. Az ilyen vektorok pedig alteret alkotnak, mégpedig az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített alteret. Ezt nevezzük oszloptérnek.

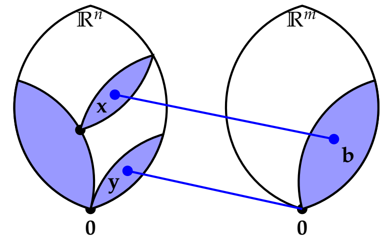
3.18. DEFINÍCIÓ (SORTÉR, OSZLOPTÉR). *Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret* oszloptérnek, *a sorvektorai által kifeszített alteret* sortérnek *nevezzük.*

Az $m \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere. Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$-val, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-val jelöljük (ld. 3.11 ábra).

Az oszlopmodellt használva az is látható, hogy egy lineáris kombináció együtthatóinak meghatározása egy egyenletrendszer megoldását jelenti.



3.10. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere ($\mathcal{S}(\mathbf{A})$), oszloptere ($\mathcal{O}(\mathbf{A})$) és nulltere ($\mathcal{N}(\mathbf{A})$).



3.11. ábra: A nulltér, a sortér, és az oszloptér, valamint a homogén $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ és az inhomogén $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy-egy megoldása a levéldiagramban.

3.19. KÖVETKEZMÉNY (INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). *Az* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha* $\mathbf{b}$ *előáll az* $\mathbf{A}$ *oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz* $\mathbf{b}$ *benne van az* $\mathbf{A}$ *oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.*

3.20. PÉLDA (KIFESZÍTETT ALTÉR VEKTORAI). *Határozzuk meg, hogy a* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ *és* $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ *vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az* $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ *vektor! Ha igen, adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt is! Mutassuk meg, hogy a* $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ *vektor nem eleme az altérnek!*

MEGOLDÁS. Olyan x_1, x_2, x_3 valósokat keresünk, melyekkel $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ fennáll. Ez egy négy egyenletből álló egyenletrendszerrel ekvivalens, melynek bővített mátrixa a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ és $\mathbf{u}$ vektorokból áll. Az egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozva kapjuk, hogy

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$.

Ha $\mathbf{u}$ helyett $\mathbf{w}$-vel számolunk, olyan egyenletrendszert kapunk, melynek nincs megoldása, tehát $\mathbf{w}$ valóban nincs benne a megadott altérben. Másként fogalmazva, a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix oszlopterében az $\mathbf{u}$ vektor benne van, de a $\mathbf{w}$ vektor nincs benne. □

Lineáris függetlenség és összefüggőség A lineáris egyenletrendszerek megoldása és vektorok lineáris függetlenségével vagy összefüggőségével kapcsolatos kérdések szoros kapcsolatban vannak egymással.

Az előző 3.20. példa tanulsága úgy is összefoglalható, hogy egy $\mathbf{w}$ vektor pontosan akkor független az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraitól, vagyis az $\{\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \,\}$ vektorrendszertől, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{w}]$ egyenletrendszer nem oldható meg.

Egy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntéséhez meg kell oldani az

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Ha van nemtriviális megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő, egyébként lineárisan független. Ez igazolja az alábbi ekvivalenciákat:

3.21. KÖVETKEZMÉNY (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG ELDÖNTÉSE). *Tekintsük az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k\end{bmatrix}$ *mátrixot! Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_k$ *vektorok lineárisan függetlenek;*

b) az $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;*

c) az $\mathbf{A}$ *lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = k$.

3.22. PÉLDA (VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGÉNEK ELDÖNTÉSE). *Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós* $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ *és* $(1, 1, 1, 0)$ *vektorok lineárisan függetlenek.*

MEGOLDÁS. A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. □

Feladatok

3.1.• Igaz – hamis Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor végtelen sok megoldása van.
b) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor lehet, hogy végtelen sok megoldása van, de az is lehet, hogy csak egy.
c) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, azaz túlhatározott, akkor biztosan nem oldható meg!
d) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, azaz túlhatározott, nem lehet végtelen sok megoldása.

3.2.• Alterek tulajdonságai: igaz – hamis

a) $\mathbb{R}^n$ bármely három alterének metszete altér.
b) Ha az $\mathcal{U}$ altér altere a $\mathcal{V}$ és a $\mathcal{W}$ altérnek is, akkor altere metszetüknek is.
c) Alterek egyesítése altér.
d) Alterek összege altér.
e) Minden altérnek eleme a zérusvektor.
f) Minden altérnek van legalább egy nemzérus vektora.

3.3.• Alterek: igaz – hamis

a) Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.
b) Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak.
c) Egy egyenletrendszer megoldásvektorainak különbségeként kapott vektorok halmaza alteret alkot.
d)
e)

3.4.• Megoldhatóság: igaz – hamis

a) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként.
b) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek.
c) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely megoldása előáll a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer két megoldásának különbségeként.
d) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
e) Az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

3.5.• Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Egy négyismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását számítógéppel próbálom ellenőrizni, de más jön ki. A saját eredményem ez:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

a számítógépé ez:

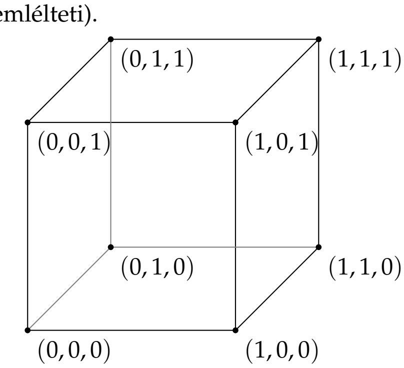
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lehet-e mindkét eredmény jó?

3.6. Megoldások lineáris kombinációja Adjunk új bizonyítást a 3.8. tételre a sormodellt használva.

3.7. Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai Adjunk az oszlopmodellben megfogalmazott új bizonyítást a 3.17. tételre.

3.8. $\mathbb{F}_2^3$ alterei Soroljuk fel $\mathbb{F}_2^3$ összes alterét (ehhez segítségül hívhatjuk az alábbi ábrát, mely az $\mathbb{F}_2^3$ vektortér vektorait szemlélteti).



Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

E szakaszban az alterek tulajdonságait, és az egyenletrendszerek kapcsán felmerülő alterek viszonyát vizsgáljuk. Különösen fontos az együtthatómátrixhoz tartozó négy kitüntetett altér kapcsolata.

Sor- és oszloptér Az előző feladatokban a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát lépcsős alakra hoztuk. Ebből az alakból azonban több minden leolvasható.

3.23. TÉTEL (ELEMI SORMŰVELETEK HATÁSA A SOR- ÉS OSZLOPVEKTOROKRA). *Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.*

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy egy mátrix sortere nem változik az elemi sorműveletek közben. A sorcserére ez nyilvánvaló. Legyenek $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ és legyen $\mathbf{u}$ a sortér egy tetszőleges vektora, ami azt jelenti, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalárok, hogy

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ha egy sort (mondjuk az elsőt) beszorozzuk egy $d \neq 0$ skalárral, akkor $\mathbf{u}$ az új mátrix sorterében is benne van, melyet a $d\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorok feszítenek ki, hisz

$$\mathbf{u} = \frac{c_1}{d}(d\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ez azt jelenti, hogy a sortér nem csökken, azaz minden vektor, ami eddig benne volt a sortérben, benne lesz az új mátrix sorterében is. A hozzáadás műveleténél ugyanezt tapasztaljuk: az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első sor d-szeresét adjuk a második sorhoz. Ekkor az új sorteret kifeszítő vektorok: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Az $\mathbf{u}$ vektor e térben is benne van, ugyanis egy egyszerű átalakítás után

$$\mathbf{u} = (c_1 - c_2 d)\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1) + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Mivel minden sorművelet inverze is egy sorművelet, az inverz sorműveletben sem csökken a sortér, ami csak úgy lehet, ha a sortér az elemi sorműveletek során változatlan marad.

Megmutatjuk, hogy az elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közt nem változnak a lineáris kapcsolatok. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy például $c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Mivel a skalárral való szorzás és a vektorösszeadás is koordinátánként végezhető, könnyen látható, hogy sorcsere, egy koordináta nemnulla skalárral való szorzása, vagy az i-edik koordináta konstansszorosának a j-edikhez adása után is fönn fog állni a két új vektor közt a fenti összefüggés. Tetszőleges számú vektor lineáris kombinációjára az állítás hasonlóan adódik. □

3.24. KÖVETKEZMÉNY (MÁTRIX LÉPCSŐS ALAKJÁNAK VEKTORAI). *Legyen* **B** *az* **A** *mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor*

1. **A** *és* **B** *sortere megegyezik,*
2. *az* **A** *oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a* **B** *ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,*
3. **B** *nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,*
4. *a főelemek oszlopvektorai* **A***-ban és* **B***-ben is lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Az első két állítás közvetlen következménye az előző tételnek.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k-adik sorvektorát. Főeleme legyen a j-edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k-nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j-edik koordináta 0. A k-nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k-adik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai **B**-ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előző tétellel adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok **A**-ban is lineárisan függetlenek. □

Fontos megjegyezni, hogy míg a lépcsős alak sortere megegyezik az eredeti mátrix sorterével, addig az oszloptér az elemi sorműveletek alatt megváltozik, tehát a mátrix és lépcsős alakjának oszloptere különbözik!

Bázis Az elemi sorműveleteket alkalmazva, egy mátrix sorterében és oszlopterében is találtunk olyan lineárisan független vektorokat, melyek kifeszítik az adott teret. Azt már az 1.9. tételben megmutattuk, hogy a háromdimenziós tér tetszőleges három lineárisan független vektorának lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előáll. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tér három lineárisan független vektora kifeszíti a teret. Az ilyen vektorhármasokat, melyeket egy koordinátarendszer alapvektorainak vettünk, bázisnak neveztük. Ezek vezetnek a következő definícióhoz.

3.25. DEFINÍCIÓ (BÁZIS). *Az* $\mathbb{R}^n$ *tér egy* alterének bázisán *vektorok olyan halmazát értjük, mely*

1. *lineárisan független vektorokból áll és*

2. *kifeszíti az alteret (azaz generátorrendszer).*
Az $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)$ *vektorokból álló halmazt* $\mathbb{R}^n$ standard bázisának *nevezzük.*

► Világos, hogy a zérustérnek nincs bázisa, hisz abban nincs egyetlen lineárisan független vektor sem.
► A standard bázis $\mathbb{R}^n$ egy n-elemű bázisa.
► Hamarosan meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}^n$ minden bázisa n-elemű, és hogy bármely alterének bázisa legfeljebb n-elemű.

3.26. PÉLDA (ALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az* $(1,1,0,-2)$, $(2,3,3,-2)$, $(1,2,3,0)$ *és* $(1,3,6,2)$ *vektorok által kifeszített altér egy bázisát!*

MEGOLDÁS. *Első megoldás:* A megadott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix valamely sorlépcsős alakjának nemnulla sorai az altér egy bázisát adják:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1,1,0,-2)$, $(0,1,3,2)$.

Második megoldás: Ha a bázist az adott vektorokból akarjuk kiválasztani, akkor képezzünk egy mátrixot e vektorokból, mint oszlopvektorokból. Lépcsős alakjában a főelemek oszlopai lineárisan független vektorok. A nekik megfelelő oszlopvektorok az eredeti mátrixban az oszloptér bázisát alkotják (ld. a 3.23. tételt és a 3.24. következmény 4. pontjának állítását).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1,1,0,-2)$ és $(2,3,3,-2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk. □

3.27. PÉLDA (VEKTOR FELÍRÁSA A BÁZISVEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT). *Az előző feladatban megadott négy vektor mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!*

MEGOLDÁS. Az előző feladat második megoldásában találtunk egy bázist a megadott vektorok közül. Mivel az oszlopvektorokkal dolgoztunk, a vektorok közti lineáris kapcsolat leolvasható bármelyik lépcsős alakból: legkényelmesebben a *redukált* lépcsős alakból. Folytatjuk tehát az előző példabeli eliminációs lépéseket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján az eredeti vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációiként való felírása:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, más bázisra juthatunk (ld. a 3.10. feladatot). □

3.28. ÁLLÍTÁS (BÁZIS EKVIVALENS DEFINÍCIÓI). *Legyen $\mathcal{U}$ az $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges altere, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:*

1. *$\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{U}$ alteret, azaz $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$ altér bázisa;*
2. *$\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{U}$-t;*
3. *$\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{U}$-ban.*

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

Legyen $\mathcal{B}$ minimális méretű generátor. Ha nem volna független, akkor belőle kiválasztva független vektorokat, mely ugyanazt a teret generálja egy még kisebb méretű generátort kapnánk.

Legyen most $\mathcal{B}$ egy maximális független rendszer. Ha nem volna generátor, akkor hozzávehetnénk tőle független vektort, vagyis volna nála nagyobb méretű független halmaz. □

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja A koordinátarendszer bevezetésénél ugyanazt tettük, mint itt az előző példában: minden vektor előállítható egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, és e vektor koordinátás alakja erre a bázisra vonatkozóan a lineáris kombináció konstansaiból áll.

Egy altérben több bázist is vizsgálhatunk, és a vektorok koordinátás alakjai különbözhetnek a különböző bázisokban. Félreértések elkerülésére a bázis jelét a koordinátás alak indexében jelöljük. Például ha egy $\mathbf{v}$ vektor standard bázisbeli és $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjai $(4,3)$, illetve $(0,5)$, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathbf{v} = (4,3) = (0,5)_{\mathcal{B}}, \text{ vagy mátrixjelöléssel } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ha általában akarunk utalni – a konkrét koordináták nélkül – egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjára, akkor a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vagy a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3.29. PÉLDA (VEKTOR KOORDINÁTÁS ALAKJA A $\mathcal{B}$ BÁZISBAN). *Tekintsük a 3.26. és a 3.27. példákban is szereplő $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3,3,-2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,2,3,0)$ és $\mathbf{v}_4 = (1,3,6,2)$ vektorok által kifeszített alteret. Ennek $\mathcal{A} = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \,\}$ egy bázisa. Írjuk fel a négy vektornak e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!*

MEGOLDÁS. Az előző példában a (3.1) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az $\mathcal{A}$ bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}.$$

Ez a 3.24. állítás 2. pontjából következik, mely szerint a redukált lépcsős alak oszlopai közti lineáris kapcsolatok megegyeznek az eredeti mátrix oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal. □

Dimenzió és rang Az előzőekben bázist kerestünk egy altérhez. Azt tapasztaltuk, hogy a bázis mindig ugyanannyi vektorból állt. Ez nem véletlen. Egy különösen fontos tétel következik.

3.30. TÉTEL (BÁZIS-TÉTEL). *Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tetszőleges alterét. Ennek bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n$-nek van olyan $\mathcal{A}$ altere, és annak két olyan bázisa,

$$\mathcal{V} = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \,\}, \text{ és } \mathcal{W} = \{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r \,\},$$

melyek nem ugyanannyi vektorból állnak, azaz például $k < r$. Mivel $\mathcal{V}$ bázis $\mathcal{A}$-ban, ezért a $\mathcal{W}$ bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként, azaz léteznek olyan a_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \tag{3.2}$$

Mivel a $\mathcal{W}$ bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn. A (3.2) egyenlőségeit a (3.3) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \\ \ldots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek $\mathcal{V}$ vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \\ \ldots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása. Ez viszont a 3.6. tétel szerint nem teljesülhet, mivel a fenti homogén egyenletrendszer egyenleteinek száma kisebb ismeretlenjei számánál ($k < r$). Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát valóban, egy altér bármely két bázisa azonos számú vektorból áll. □

Ha a háromdimenziós térben tekintünk egy origón átmenő síkot, látjuk, hogy bármely két független vektora kifeszíti. Azaz minden bázisa kételemű. Ha egy origón átmenő egyenest tekintünk, azt minden nemnulla vektora, mint egyelemű bázisa, kifeszíti. A hétköznapi életben is használt fogalom, a dimenzió, megegyezik a bázis elemszámával. Miután egy altér minden bázisa azonos elemszámú, értelmes a következő definíció:

3.31. DEFINÍCIÓ (DIMENZIÓ). *Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathcal{A}$ alterének* dimenzióján *egy bázisának elemszámát értjük, és e számot* dim $\mathcal{A}$*-val jelöljük.*

Az $\mathbb{R}^n$ altere saját magának, és standard bázisa épp n vektorból áll, így $\dim \mathbb{R}^n = n$. A nullvektorból álló altérben nincsenek független vektorok, így dimenziója 0.

Mielőtt a következő állítást megfogalmaznánk, definálunk egy egyszerű fogalmat. Mivel a mátrixalkalmazásokban nincs olyan természetes elv, amely alapján el lehetne dönteni, hogy mely mennyiségeket rendeljünk a sorokhoz, melyeket az oszlopokhoz, ugyanakkor a számítások közben ez korántsem mindegy, ezért szükség lehet a következő egyszerű műveletre: az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix *transzponáltján* azt az $\mathbf{A}'$-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Azaz

$$\mathbf{A}' = [a_{ij}]' := [a_{ji}].$$

3.32. PÉLDA (MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA). *Az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixok transzponáltja

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}' = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Adott véges sok $\mathbb{R}^n$-beli vektor által kifeszített altér dimenzióját úgy határozhatjuk meg, hogy meghatározzuk a vektorokból képzett mátrix rangját. Igaz ugyanis a következő állítás:

3.33. ÁLLÍTÁS (DIMENZIÓ = RANG). *Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}')$.

BIZONYÍTÁS. A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. A 3.24. tétel szerint viszont e sorok lineárisan függetlenek és kifeszítik a sorteret, tehát bázist alkotnak, így számuk a sortér dimenzióját adja. Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret, tehát e tér dimenziója is a mátrix rangjával egyezik meg. Az utolsó állítás abból következik, hogy $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}'$ oszlopterével. □

3.34. DEFINÍCIÓ (VEKTORRENDSZER RANGJA). *Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorokból álló vektorrendszer* rangján *a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.*

3.35. PÉLDA (DIMENZIÓ KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az* $\mathbf{A}$ *mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója is 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, esetünkben ez 3. Vegyük észre, hogy a sortér és a nulltér dimenziójának összege megegyezik a változók számával, azaz a mátrix oszlopainak számával, jelen példában 5-tel. □

3.36. TÉTEL (DIMENZIÓTÉTEL). *Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:*

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

BIZONYÍTÁS. A mátrix sorterének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával. Megmutatjuk, hogy a nulltér dimenziója megegyezik a szabad változók számával, így e két szám összege valóban n, ami bizonyítja az állítást (ld. még a 4.37. tételben).

Elég tehát megmutatnunk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer redukált lépcsős alakkal előállított megoldásában a szabad változók száma megegyezik a nulltérből kiválasztható bázis elemszámával. Először lássunk egy ilyen megoldást konkrétan. Például a 2.38. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $x_2 = s$, $x_4 = t$ és $x_5 = u$ a három szabad változó. A nullteret kifeszítő három vektor közül az elsőben $x_2 = 1$, de az összes többiben $x_2 = 0$, így az első vektor független a többitől. Hasonlóképp általában is igaz, hogy a redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egy koordinátát kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját. □

A sortér és a nulltér merőlegessége Az $\mathbf{A}$ mátrix sorvektorai érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egy homogén lineáris egyenletrendszer minden egyenletének bal oldala az együtthatómátrix egy sorvektorának és a megoldásvektornak a skaláris szorzata. Mivel e szorzat értéke 0, ezért e két vektor merőleges egymásra.

3.37. PÉLDA (VEKTOROKRA MERŐLEGES ALTÉR). *Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!*

MEGOLDÁS. Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. Ezt koordinátákkal felírva két egyenletet kapunk, melynek együtthatómátrixa és annak egy lépcsős alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora.

Másként fogalmazva, e feladatban meghatároztuk az összes olyan vektort, mely egy mátrix sorvektorainak mindegyikére merőleges. □

Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \text{ azaz } \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszer minden megoldása merőleges az $\mathbf{A}$ mátrix minden sorvektorára. A merőlegesség azonban a sortér összes vektorára is fönnáll a következő állítás következtében.

3.38. ÁLLÍTÁS (A SORTÉR ÉS A NULLTÉR MERŐLEGESSÉGE). *A valós $\mathbf{A}$ mátrix sorterének bármely $\mathbf{s}$ vektora és nullterének tetszőleges $\mathbf{x}$ vektora merőleges egymásra, azaz $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$.*

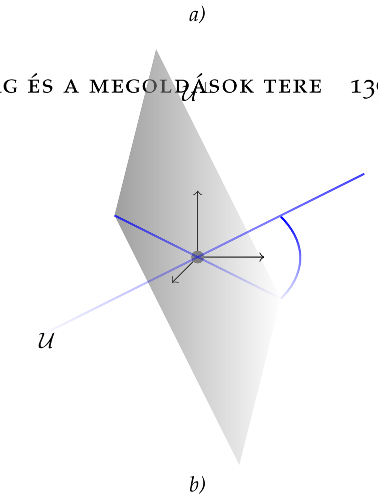
BIZONYÍTÁS. A sortér minden vektora az $\mathbf{A}$ sorvektorainak valamely $c_1, \ldots, c_m$ skalárokkal vett lineáris kombinációja. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{a}_{1*} + c_2\mathbf{a}_{2*} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1\mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_m 0 = 0. \end{aligned}$$

□

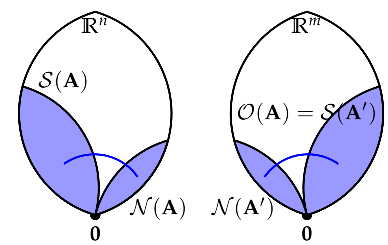
Ez az állítás a következő definíciókra vezet: egy vektortér két altere *merőleges*, ha bárhogy választva egy vektort az egyik altérből, és egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek egymásra. Eszerint az előző állítás úgy fogalmazható meg, hogy bármely valós mátrix sortere és nulltere merőleges egymásra. Ennél azonban több is igaz, a nulltér nem csak merőleges a sortérre, de az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sortérre. Az $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{W}$ alterére merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ *merőleges kiegészítő alterének* nevezzük és $\mathcal{W}^\perp$-pel jelöljük (amit olvashatunk „W perp”-nek).

A két fogalom közti különbséget mutatja a 3.12. ábra, melynek *a)* része a 3-dimenziós tér két, egymásra merőleges 1-dimenziós $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ alterét szemlélteti, míg a *b)* rész az $\mathcal{U}$ alteret, és annak 2-dimenziós merőleges kiegészítő $\mathcal{U}^\perp$ alterét szemlélteti.



3.12. ábra: *a)* Két merőleges altér $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$; *b)* Egy altér és merőleges kiegészítő altere: $\mathcal{U}$ és $\mathcal{U}^\perp$.

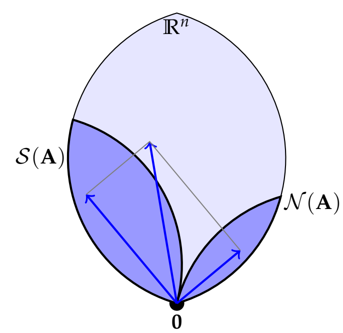
Vegyük az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját! Az $\mathbf{A}'$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai merőlegesek $\mathbf{A}'$ sorvektoraira, azaz az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraira. E két-két altér merőlegességét szemlélteti a 3.13. ábra. E négy altér igen fontos lesz a továbbiakban is, ezért ezeket a mátrixhoz tartozó *négy kitüntetett altérnek* vagy négy fundamentális altérnek nevezzük. Ezek tehát $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}')$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}')$.



3.13. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere merőleges nullterére, oszloptere az $\mathbf{A}'$ nullterére. A berajzolt két ív az alterek merőlegességét jelöli.

A lineáris algebra alaptétele A nulltér az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sorvektorokra, azaz a sortérre. Vajon a nulltér minden vektorára merőleges vektorok egybeesnek a sortér vektoraival? A válasz igen, melyet a lineáris algebra alaptétele ad meg.

3.39. TÉTEL (A LINEÁRIS ALGEBRA ALAPTÉTELE). *Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.*



3.14. ábra: A lineáris algebra alaptétele: az $\mathbf{A}$ mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterek. Eszerint bármely vektor, ami merőleges a nulltérre, a sortérben van. Később megmutatjuk, hogy ez azt is jelenti, $\mathbb{R}^n$ bármely vektora egyértelműen felbomlik egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére.

BIZONYÍTÁS. Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér. Később látni fogjuk, hogy általánosan is igaz az, hogy bármely $\mathcal{V}$ altérre $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ (ld. **??** tétel). Ezt használva kész is a bizonyítás. Most azonban ezt nem használva megmutatjuk, hogy a nulltér merőleges kiegészítő altere a sortér. Legyen a valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathcal{S}$, nulltere $\mathcal{N}$, és ezek egy-egy bázisa $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k\}$, illetve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-k}\}$. $\mathcal{S}$ és $\mathcal{N}$ merőlegessége miatt $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, r$ és $j = 1, 2, \dots, n-r$ esetén. E két bázis együtt $\mathbb{R}^n$ egy bázisát adja, hisz n elemű és független vektorokból áll. A függetlenség abból következik, hogy nullvektort előállító tetszőleges

$$\underbrace{c_1\mathbf{s}_1 + \cdots + c_r\mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_{n-r}\mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$$

lineáris kombináció csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ a két altér metszetében van, így azok mindketten a nullvektorok, és így $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_{n-r} = 0$.

Ha $\mathbf{x}$ egy olyan vektor, mely merőleges $\mathcal{N}$ minden vektorára, akkor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-r)$. Ha

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{s}_1 + \cdots + y_r\mathbf{s}_r + x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_{n-r}\mathbf{e}_{n-r},$$

akkor az $\mathbf{e}_i$ vektorokkal való beszorzás a következő homogén lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{array}{rrrr}
(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r)x_n & = 0 \\
(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_r)x_n & = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + & (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_{n-r})x_n & = 0
\end{array}$$

Ez pedig egyértelműen megoldható, mert együtthatómátrixának rangja r. Ennek bizonyítását az Olvasóra hagyjuk. Egy bizonyítás látható a 3.11. feladatban, egy másik, egyszerűbb a **??** feladatban. □

► A tétel állítása képletben kifejezve azt mondja, hogy $\mathcal{S}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, ami egyúttal azt is lejenti, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.
► Ha a lineáris algebra alaptételét az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltjára alkalmazzuk, és fölhasználjuk, hogy $\mathbf{A}$ oszloptere megegyezik $\mathbf{A}'$ sorterével, akkor azt kapjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A}')$.
► Később azt is meg fogjuk mutatni, hogy ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két merőleges kiegészítő altere egymásnak $\mathbb{R}^n$-ben, akkor a tér minden $\mathbf{x}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakban, ahol $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ (ld. **??**, **??** tételek). Ez itt azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

*Elemi bázistranszformáció** Az előző paragrafusokban azt láttuk, hogy az elemi sorműveletek eredményeként az eredeti mátrix oszlopainak egy másik bázisban felírt koordinátás alakját kapjuk meg. Ez adja az ötletet ahhoz, hogy az altérből választott bázisok segítségével szemléltessük, és értsük meg mi történik akkor, amikor a mátrix egy oszlopában főelemet (pivotelemet) választunk, és oszlopának többi elemét elimináljuk. Így egy másik megközelítéshez jutunk, melyet a továbbiakban nem használunk, ezért e paragrafus átugorható.

A folyamat lényege egy kétoszlopos mátrixon is jól szemléltethető. Az egyszerűség kedvéért a két oszlop legyen az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, a bázis, melyben e vektorok meg vannak adva, legyen a standard bázis. Tegyük fel, hogy $a_i \neq 0$. Ekkor az a_i pozícióját választva, a kiküszöbölés eredményeként a következőket kapjuk.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{bmatrix}$$

Tudjuk, az oszlopok az elemi sorműveletek után az eredeti vektorokat adják egy másik bázisban. Az $\mathbf{a}$ vektor nyilvánvalóan egy olyan bázisban lett felírva, amelyben szerepel az $\mathbf{a}$ vektor is, mégpedig ez az i-edik bázisvektor. Megmutatjuk, hogy mindkét oszlop az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

bázisban lett felírva. Az $\mathbf{a}$ vektorra ez nyilván igaz. Nézzük a $\mathbf{b}$ vektort! Fejezzük ki az $\mathbf{e}_i$ vektort az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i\mathbf{e}_i + \ldots + a_m\mathbf{e}_m$ felírásból:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{1}{a_i}a_1\mathbf{e}_1 - \frac{1}{a_i}a_2\mathbf{e}_2 - \ldots + \frac{1}{a_i}\mathbf{a} - \ldots - \frac{1}{a_i}a_m\mathbf{e}_m.$$

Ezt behelyettesítjük a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \ldots + b_i\mathbf{e}_i + \ldots + b_m\mathbf{e}_m$ kifejezésbe:

$$\mathbf{b} = (b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{b_i}{a_i}\mathbf{a} + \ldots + (b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m)\mathbf{e}_m.$$

Tehát valóban, a $\mathbf{b}$ koordinátás alakja e módosított bázisban épp az, amit az eredeti mátrix eliminálása után kaptunk a második oszlopban. Az imént tárgyalt lépést elemi bázistranszformációnak nevezzük, mert egy másik bázisra való áttérés egy elemi lépésének tekintjük, amikor egyetlen bázisvektort cserélünk ki. A történtek szemléltetésére a mátrixot fejléccel együtt egy táblázatba írjuk, a sorok elé az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ bázisvektorok, az oszlopok fölé az oszlopvektorok neve kerül.

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_i & a_i & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & a_m & b_m \end{array} \implies \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{array}$$

Összefoglalva és egyúttal általánosabban megfogalmazva a fentieket:

3.40. TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ). *Tegyük fel, hogy az* **a** *vektor* $E = \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \}$ *bázisra vonatkozó i-edik koordinátája* $a_i \neq 0$. *Ekkor az E által generált* $\mathcal{E}$ *altérnek az*

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_m$$

vektorok is bázisát alkotják. Az $\mathcal{E}$ *egy tetszőleges b vektorának koordinátás alakja megkapható e bázisban elemi sorműveletekkel, ha* a_i*-t választjuk főelemnek.*

Az elemi bázistranszformáció alkalmas arra, hogy a bázisok változásán keresztül egy más nézőpontból világítsa meg a redukált lépcsős alakra hozással megoldható feladatokat. Példaként vizsgáljuk meg, mi történik egy egyenletrendszer megoldásakor. Megjegyezzük, hogy itt nincs szükség sorcserére, mert egy oszlopból szabadon választhatunk olyan sort, amelynek fejlécében még az eredeti bázisvektor szerepel.

3.41. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓVAL). *Oldjuk meg a 2.35. és a 2.43. példában megoldott egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.*

MEGOLDÁS. A táblázatokat egybefűzzük, a sorok fejlécein mindig jelezzük az aktuális bázist, az oszlopok fejléceit a jobb érthetőség végett mindig kiírjuk, a kiválasztott főelemeket külön jelöljük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	$\boxed{1}$	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	−5	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	1
$\mathbf{e}_2$	2	2	3	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	−1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	−1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{e}_3$	1	3	3	4	$\mathbf{e}_3$	0	2	1	4	$\mathbf{e}_3$	0	0	$\boxed{3}$	−6	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	−2
$\mathbf{e}_4$	1	2	1	5	$\mathbf{e}_4$	0	$\boxed{1}$	−1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	−1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	3

A táblázaton kicsit lehet egyszerűsíteni, azt az oszlopot, amelyben már csak egy standard egységvektor van, felesleges kiírni, az oszlopok és a sorok fejléceibe pedig elég csak azt a változót írni, amelyik a bázisba vett oszlopvektorhoz tartozik. Így a következőt kapjuk:

x	y	z	$\mathbf{b}$		y	z	$\mathbf{b}$		z	$\mathbf{b}$		$\mathbf{b}$
$\boxed{1}$	1	2	0	x	1	2	0	x	3	−5	x	1
2	2	3	2		0	−1	2		−1	2		0
1	3	3	4		2	1	4		$\boxed{3}$	−6	z	−2
1	2	1	5		$\boxed{1}$	−1	5	y	−1	5	y	3

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$. □

Feladatok

3.9.• Bázis: igaz – hamis

a) A $\mathcal{V}$ altérben a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer bázis, ha tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor egyértelműen felírható e vektorok lineáris kombinációjaként.

b) Van olyan altér, melynek bármely nemnulla vektora bázis.

c) Van olyan altér, melynek van kételemű bázisa, és van ettől különböző három lineárisan független vektora.

3.10. Határozzuk meg a 3.27. példabeli vektorok által kifeszített altér egy másik bázisát úgy, hogy a vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba. Legyen például a sorrend $\mathbf{w}_1 = (1,1,2,1)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,3,2)$, $\mathbf{w}_3 = (6,0,3,3)$, $\mathbf{w}_4 = (2,-2,-2,0)$. Fejezzük ki mind a négy vektort ezek lineáris kombinációjaként! Végül írjuk fel mind a négy vektor koordinátás alakját e bázisban!

3.11. Vektorok skaláris szorzatai Igazoljuk, hogy a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$

mátrix rangja pontosan akkor k, ha az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,$\dots$, $\mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek.

Megoldások

3.1. Mindegyik állítás hamis.

3.2. 1. Igaz. 2. Igaz. 3. Hamis, csak akkor igaz, ha egyik a másik altere. 4. Igaz. 5. Igaz. 6. Hamis, a zérustér az egyetlen zérusvektorból áll.

3.3. 1. Hamis, csak a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotnak alteret, az inhomogéné eltolt alteret. 2. Igaz. Ez épp az oszloptér, ugyanis csak az oszloptérből való $\mathbf{b}$ vektorokra oldható meg az egyenletrendszer. 3. 4. 5.

3.4. 1. Igaz. 2. Igaz. 3. Hamis. 4. Igaz, ugyanis az állításbeli $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$, és ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenletrendszer megoldható. 5. Hamis, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$, és az egyenletrendszer több, mint n egyenletből áll, akkor előfordulhat, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n+1$, és ekkor az egyenletrendszer nem oldható meg!

3.5. Első ránézésre csak annyi látszik, hogy mindkét megoldás egy kétdimenziós altér eltoltja. Először megvizsgáljuk, hogy a két altér – vagyis az egyenletrendszer homogén részére adott két megoldás – egybeesik-e. Elég megmutatni, hogy az egyik altérben benne van a másikat generáló két vektor. Ha igen, a két altér megegyezik. Ezesetben el kell dönteni, hogy az inhomogén két partikuláris megoldása az altérnek ugyanabban az eltoltjában van-e. Vagy egyszerűbben, hogy a két partikuláris megoldás különbsége benne van-e az altérben. E kérdéseket egyetlen mátrix lépcsős alakra hozásával is megoldhatjuk. Az első két oszlop az első, a második két oszlop a második altér generátorait tartalmazza, az ötödik oszlop a két partikuláris megoldás különbsége.

$$\left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az eredményből látszik, hogy a két megoldás azonos.

3.6. Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az együtthatómátrix i-edik sorát és $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ a homogén egyenletrendszer egy-egy megoldását, azaz $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), akkor

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (c\mathbf{x} = d\mathbf{y}) = c\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + d\mathbf{a}_{i*}\mathbf{y} = 0 + 0 = 0,$$

tehát a két megoldásvektor bármely lineáris kombinációja is megoldás. Másként fogalmazva a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás, tehát a megoldások alteret alkotnak.

3.7. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, H a homogén, I az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + H = I$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + H \subseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a H egy tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}, \text{ illetve} \\ &\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(x_1 + y_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + y_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(x_n + y_1) = \\ &(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) + (\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n) = \\ &\mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in I$.

$\mathbf{x} + H \supseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in I$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in H$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(z_1 - x_1) + \mathbf{a}_2(z_2 - x_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(z_n - x_1) = \\ &(\mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \ldots + \mathbf{a}_n z_n) - (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) = \\ &\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in H$. Ezzel kész a bizonyítás.

3.8. Összesen 16 altere van $\mathbb{F}_2^3$-nek. Van egy 0-dimenziós, a $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ tér. Az egydimenziós alterek a nullvektorból és egyetlen tőle különböző további vektorból állnak (7 ilyen altér van). A kétdimenziós alterek mindegyike a nullvektorból, két további egymástól is különböző vektorból és azok összegéből áll. Ezeket felsoroljuk:

$$\begin{aligned} &\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}. \end{aligned}$$

Végül altér maga $\mathbb{F}_2^3$ is.

3.9. 1. Igaz. 2. Igaz, bármely 1-dimenziós altér ilyen. 3. Hamis, ha van kételemű bázis, akkor a lineárisan független vektorrendszerek elemszáma legföljebb 2.

3.10. A mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk a $\mathbf{w}_1 = (1, 3, 6, 2)$ és a $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 0, -2)$ vektorokat. A többi vektor kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

mátrixból kiolvasható, hogy a fenti altérnek $\mathcal{B} = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \}$ bázisa, és ebben a bázisban a négy vektor koordinátás alakja rendre

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

3.11. E mátrix rangja pontosan akkor k, ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, azaz ha az oszlopvektorok bármely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nullvektor, ha minden együttható 0. Tekintsünk az oszlopvektorok egy $c_1, \ldots, c_k$ skalárokkal vett, nullvektort adó lineáris kombinációját. Ennek i-edik koordinátája

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{v}_i \cdot (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$ vektor olyan, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok mindegyikével vett skaláris szorzata 0, így ezek bármelyik lineáris kombinációjával vett skaláris szorzata is 0, tehát például az $\mathbf{x}$ vektorral vett szorzat is 0, azaz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Ez viszont csak $\mathbf{x} = 0$ esetén állhat fönn, és mivel a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, csak a $c_i = 0$ konstansokkal vett lineáris kombinációjuk lehet 0, ahol $i = 1, 2, \ldots, k$.

Irodalomjegyzék

Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. `http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf`, 2002.

Tárgymutató