12. fejezet

Határozatlan integrál

Határozatlan integrál

D 12.1 *Azt mondjuk, hogy az egyváltozós valós f függvénynek a H halmazon* **primitív függvénye** *az F függvény, ha a H halmazon f és F értelmezve van, továbbá F differenciálható a H halmazon, mégpedig*

$$F'(x) = f(x), \quad \text{ha} \quad x \in H\,.$$

Az egyváltozós valós f függvény primitív függvényeinek összességét az f **határozatlan integrál***jának nevezzük és a következőképpen jelöljük: $\int f(x)\,dx$, vagy $\int f$.*

T 12.2 *Ha az egyváltozós valós f függvénynek valamely I intervallumon primitív függvénye F és G, akkor van olyan valós C szám, hogy az I intervallum minden x elemére $G(x) = F(x) + C$.*

D 12.3 *Az elemi függvények differenciálási szabályaiból adódó integrálási képleteket* **alapintegrál***oknak nevezzük. A fontosabbak:*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^*, \text{ ha } n \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C^*;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C^*, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C^*;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C, \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{arsh} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{arch} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C^* = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C^*, & \text{ha } |x| < 1, \\ \operatorname{arcth} x + C^*, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

Ahol C^* jelöli az integrációs konstanst, ott ezzel azt jelezzük, hogy az integrandus értelmezési tartománya több intervallumból áll (az x^n függvénynél csak negatív n esetén), az összefüggés pedig csak egy, de bármelyik intervallumon érvényes. Az egész értelmezési tartományon érvényes összefüggést úgy kapunk, ha minden intervallumon külön konstanst használunk. Pl.:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x, & ha\ x > 0, \\ \ln(-x), & ha\ x < 0. \end{cases}$$

T 12.4 *A függvények differenciálási szabályaiból közvetlenül adódnak az integrálás alábbi* **általános szabályai***:*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,; \tag{1}$$

$$\int (k \cdot f(x))\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \quad (k \in \mathbf{R})\,; \tag{2}$$

$$\int f^v(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + C\,, \quad (v \in \mathbf{R}, v \neq -1)\,; \tag{3}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,. \tag{4}$$

Ha $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, akkor bármely a és b $(a \neq 0)$ konstansokkal

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad \textit{speciálisan} \quad \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{5}$$

Ha $\int f(u)\,du = F(u) + C$, akkor bármely differenciálható g belső függvénnyel

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,. \tag{6}$$

P 12.5 *Számítsuk ki az $\dfrac{1}{(\sin^2 x)\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$ határozatlan integrálját. A (3) szabályt alkalmazzuk:*

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{4}} \cdot (\operatorname{ctg} x)'\,dx = -\frac{(\operatorname{ctg} x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C\,.$$

P 12.6 *Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$ függvény határozatlan integrálját. Mivel $(1+\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$, a (4) szabály alapján*

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2f(x)\,dx = \ln\sqrt{1+\sin^2 x} + C\,.$$

P 12.7 *Számítsuk ki az $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx^2}$, $(a\,, b > 0)$ határozatlan integrált. Átalakítás után az (5) szabályt alkalmazzuk:*

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x + C\,.$$

P 12.8 *Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Állítsuk elő $\displaystyle\int f(x)\,dx$-et! A (5) szabállyal:*

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

P 12.9 *Számítsuk ki az* $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$ *határozatlan integrált. A* (6) *szabállyal:*

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2 - 1}} \cdot (\sqrt{2}\cos x)'\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arch}(\sqrt{2}\cos x) + C.$$

Feladatok

Az összeg- és különbségfüggvény, illetve a konstanssal szorzott függvény integrálási szabályát alkalmazva oldjuk meg az alábbi feladatokat. (A gyökös kifejezéseket írjuk át törtkitevős alakba.)

1. $\int 7x^4\,dx,$ **2.** $\int \sqrt[5]{x}\,dx,$

3. $\int (t^2 + 6t - 5)\,dt,$ **4.** $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx,$

5. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx,$ **6.** $\int \left(2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\,dx.$

Oldjuk meg maradékos osztás után az alábbi feladatokat:

7.• $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\,dx,$ **8.**▷ $\int \frac{x^3}{x+5}\,dx,$ **9.**▷ $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx,$

10. $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}}\,dx,$ **11.** $\int \frac{x^4}{x^2 + a^2}\,dx,$ **12.** $\int \frac{x^5}{x^3 - a^3}\,dx,$

13. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}\,dx.$

A **T 12.4** alatti (3) és (4) integrálási szabályok alapján oldjuk meg az alábbi feladatokat:

14. $\int (2x-3)^{100}\,dx,$ **15.** $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\,dx,$ **16.** $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx,$

17. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}},$ **18.**▷ $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx,$ **19.**• $\int (a+bx)^n\,dx,$

20. $\int r^2\sqrt[3]{1+r^3}\,dr,$ **21.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}},$ **22.** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

23. $\int \sin^3 x\cos x\,dx,$ **24.**• $\int \cos^3 x\,dx,$ **25.** $\int \sin^3 x\,dx,$

26. $\int \sin^5 x\,dx,$ **27.** $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx,$ **28.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx,$

29. $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx,$ **30.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx,$ **31.** $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx,$

32.⋆ $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}},$ **33.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx,$ **34.** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}},$

35. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\, dx$, **36.** $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$, **37.**▷ $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\, dx$,

38. $\int \frac{7}{4x-1}\, dx$, **39.** $\int \frac{8x-7}{4x^2-7x+11}\, dx$, **40.** $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\, dx$,

41. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\, dx$, **42.** $\int \frac{x}{x^2+a^2}\, dx$, **43.** $\int \frac{3x^2}{a^3+x^3}\, dx$,

44.▷ $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$, **45.**▷ $\int \frac{dx}{\sin x}$, **46.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

47. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$, **48.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx$, **49.** $\int \frac{a^x}{a^x+1}\, dx$,

A **T 12.4** alatti (5) és (6) integrálási szabályok alapján oldjuk meg az alábbi feladatokat:

50. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$, **51.** $\int \frac{dx}{3x^2+6x+5}$, **52.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$,

53. $\int \frac{1}{x^2-2x-3}\, dx$, **54.** $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$, **55.**• $\int \frac{x\, dx}{4+x^4}$,

56.▷ $\int \frac{x}{a^4-x^4}\, dx$, **57.**▷ $\int \frac{x^3}{x^8-2}\, dx$, **58.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$,

59.• $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$, **60.**• $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-3}}$, **61.**• $\int \frac{dx}{\sqrt{3+6x-9x^2}}$,

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$, **63.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$, **64.** $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$,

65. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$, **66.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$, **67.**▷ $\int \frac{dx}{a^{-x}+a^x}\, dx$,

68. $\int \frac{\sin \ln x}{x}\, dx$, **69.**▷ $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx$, **70.** $\int \frac{dx}{x \ln x}$,

71. $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$, **72.**⋆ $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, **73.**⋆ $\int \frac{a^2 b^2\, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

Parciális integrálás

D 12.10 *A szorzatfüggvény differenciálási szabályából nyerhető*

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$$

képletet a **parciális integrálás** *képletének nevezzük, és ha ezt a képletet alkalmazzuk, akkor azt mondjuk, hogy az illető függvényt parciálisan integráljuk.*
A parciális integrálásra különösen alkalmas függvények típusai:
1. **típus**. *A*

$$p(x) \cdot t(ax+b) \quad (a, b \in \mathbf{R};\ a \neq 0)$$

alakú függvények, amelyekben p: polinomfüggvény, t: a sin, cos, sh, ch, exp *valamelyike. Ebben az esetben legyen* $f'(x) = t(ax+b)$ *és* $g(x) = p(x)$*. Annyi parciális integrálásra*

lesz szükségünk, amennyi p foka.
2. **típus**. *Az*

$$x^v \ln^n x \quad (n \in \mathbf{N}\,,\ v \in \mathbf{R}\,,\ v \neq -1)$$

alakú függvények. Ebben az esetben legyen $f'(x) = x^v$ és $g(x) = \ln^n x$. Itt n parciális integrálásra lesz szükség.
3. **típus**. *A*

$$t_1(ax+b) \cdot t_2(cx+d) \quad (a, b, d \in \mathbf{R};\ a \neq 0,\ c \neq 0)$$

alakú függvények, ahol t_1 és t_2 az 1. típusnál a t-ként felsorolt öt függvény valamelyike. (Az $f'(x)$ és $g(x)$ megválasztásához lásd **P 12.11.***)*
4. **típus.** *A*

$$p(x) \cdot a(x)$$

akakú függvények, amelyekben p: polinomfüggvény, a: arkusz- vagy areafüggvény. Ebben az esetben legyen $f'(x) = p(x)$ és $g(x) = a(x)$.

P 12.11 *A 3. típusú függvények parciális integrálásánál egyenletet írhatunk fel a kiszámítandó határozatlan integrálra, mely egyenlethez két módon is eljuthatunk. Szemléltessük ezt az*

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx \quad (a, b \neq 0 \text{ konstans})$$

kiszámításán. Eljárhatunk úgy, hogy I-t két különböző módon parciálisan integráljuk, egyszer $f'(x) = \sin bx$ és $g(x) = e^{ax}$ választással, majd $f'(x) = e^{ax}$, $g(x) = \sin bx$ választással:

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx \, dx\,,$$
$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx \, dx\,.$$

Az első egyenletet $\frac{b}{a}$-val, a másodikat $\frac{a}{b}$-vel szorozva és összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{b}{a}I + \frac{a}{b}I = \frac{a^2+b^2}{ab}I = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a}\cos bx, \quad \text{amiből } I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Eljárhatunk úgy is, hogy a fenti első egyenletben tovább integráljuk parciálisan a második tagot $f'(x) = \cos bx$, $g(x) = e^{ax}$ választással:

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left(e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx \, dx\right) = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Ebből ismét

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Feladatok

A parciális integrálás módszerével oldjuk meg az alábbi feladatokat:

74.• $\int x\cos x\,dx$, **75.** $\int x\sin 2x\,dx$, **76.** $\int x^2\cos 2x\,dx$,

77. $\int x\cos 2x\,dx$, **78.** $\int x^2\sin 2x\,dx$, **79.** $\int x^3\sin x\,dx$,

80. $\int x^3\cos x\,dx$, **81.** $\int x\cos^2 x\,dx$. **82.** $\int x\cdot 3^x\,dx$,

83. $\int xe^{-x}\,dx$, **84.** $\int x^2e^{-2x}\,dx$, **85.** $\int e^{-x}\sin x\,dx$,

86. $\int e^{2x}\cos x\,dx$, **87.**▷ $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, **88.** $\int e^{6x}\cos 4x\,dx$,

89. $\int e^{x}\sin^2 x\,dx$, **90.** $\int \arcsin x\,dx$, **91.** $\int (\arcsin x)^2\,dx$,

92. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$, **93.** $\int \arccos\frac{1}{x}\,dx$, **94.** $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx$,

95.• $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$, **96.**▷ $\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\,dx$, **97.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$,

98. $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, **99.** $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, **100.**▷ $\int \ln x\,dx$,

101. $\int \ln^2 x\,dx$, **102.** $\int \ln^3 x\,dx$, **103.** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\,dx$,

104. $\int \ln(x^2+1)\,dx$, **105.** $\int \ln\frac{8-x}{3}\,dx$, **106.** $\int \lg\frac{4}{x}\,dx$,

107. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$, **108.** $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$, **109.** $\int x^v\ln x\,dx$, $(v\neq -1)$,

110. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$, **111.** $\int x\operatorname{sh} x\,dx$, **112.** $\int x^3\operatorname{ch} 3x\,dx$,

113. $\int (2x-x^2)\operatorname{sh} x\,dx$, **114.** $\int \operatorname{ch} x\cos 5x\,dx$.

115. Igazoljuk, hogy $\int\cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

116. Igazoljuk, hogy $\int\sin^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

Integrálás helyettesítéssel

D 12.12 *Az $f(x)$ függvény* **helyettesítéssel történő integrálás***áról beszélünk, ha*

1. *az x változó helyébe valamely t változónak egy invertálható és differenciálható $u(t)$ függvényét helyettesítjük; kimutatható, hogy ekkor a dx helyébe az $u'(t)\,dt$ kifejezést kell írnunk, és a számítást a következőképpen kell folytatnunk:*
2. *elvégezzük a t szerinti integrálást;*
3. *végül az u függvény $\overline{u}$ inverzét véve a $t = \overline{u}(x)$ helyettesítéssel visszaírjuk az eredeti x változót. Képletben:*

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=\overline{u}(x)}.$$

Megjegyzés. A gyakorlatban esetenként nem közvetlenül az x változó helyébe vezetjük be az $u(t)$ függvényt, hanem az f valamely belső függvényét helyettesítjük valamely más függvénnyel, vagy egyszerűen x valamely függvénye helyébe írjuk a t változót. Ez az utóbbi eset azonos a (6) képletben leírttal.

T 12.13 A leggyakoribb helyettesítések: *Legyen $R(x,y)$ egy racionális törtfüggvény. Az alább konkrétan megnevezett f és g függvényekből felépített $R(f,g)$ függvények integrálásához használatos helyettesítések:*

Az $R(\sin x\,,\cos x)$ típus esetén a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ helyettesítés. Ekkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ha $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, akkor használható az általában egyszerűbb $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítés is. Ekkor

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Az $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ típus esetén vagy az ($R(e^x)$ esetben használható) $e^x = t$ helyettesítés, amikor $dx = \frac{dt}{t}$, vagy a $\operatorname{th}\frac{x}{2} = u$ helyettesítés, amikor

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2},\quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2},\quad dx = \frac{2du}{1-u^2}.$$

Az $R\left(x\,,\sqrt{1-x^2}\right)$ esetén a helyettesítés $x = \sin t$.
Az $R\left(x\,,\sqrt{x^2+1}\right)$ esetén a helyettesítés $x = \operatorname{sh} t$.
Az $R\left(x\,,\sqrt{x^2-1}\right)$ esetén a helyettesítés $x = \operatorname{ch} t$, ha $x \geq 0$, és
az $R\left(x\,,\sqrt{x^2-1}\right)$ esetén a helyettesítés $x = -\operatorname{ch} t$, ha $x \leq 0$.
Az $R\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \ldots, x^{\frac{k}{l}}\right)$ $(a,b,c,d,\ldots,k,l \in \mathbf{N}^+)$ esetén a helyettesítés $x = u^\lambda$, ahol λ a kitevők nevezőinek legkisebb közös többszöröse.

P 12.14 *Gyakran az alkalmas helyettesítés megtalálásához az integrálandó függvényen átalakítást kell végeznünk. Keressük például a $\sqrt{1+2x-x^2}$ függvény határozatlan integrálját. Előbb átalakítjuk a függvényt:*

$$I=\int\sqrt{1+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\sqrt{2}\int\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx.$$

Ez utóbbi alak az $u=\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$ helyettesítéssel $R\left(u,\sqrt{1-u^2}\right)$ típusú lesz, amelyre a **T 12.13** *szerint az $u=\sin t$ helyettesítést alkalmazzuk. A több lépésből álló helyettesítés egy lépésben is elvégezhető: $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}=\sin t$. Ekkor $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$, és*

$$I=\sqrt{2}\int\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t\,dt=2\int\cos^2 t\,dt=2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=t+\frac{\sin 2t}{2}+C=$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sin t\cdot\cos t+C=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}+C=$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}+C\,.$$

P 12.15 *Előfordulhat, hogy a fentiekben ajánlott helyettesítésnél kevesebb számolással járó helyettesítést is találhatunk. Számítsuk ki például az $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(x>1)$ integrált.*

Az ajánlott helyettesítés: $x=\operatorname{ch}t$. Ekkor $dx=\operatorname{sh}t\,dt$ és $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{ch}t\,\operatorname{sh}t}=\int\frac{dt}{\operatorname{ch}t}$.

Ez utóbbit megoldhatjuk a $\operatorname{th}\dfrac{t}{2}=u$ helyettesítéssel: a (13) képletek szerint $I=\displaystyle\int\frac{2du}{1+u^2}=2\operatorname{arctg}u+C$. A $\operatorname{ch}t=\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ egyenletből $u=\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{ch}t+1}}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, tehát $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$.

Számítsuk ki ugyanezt a feladatot $t=\dfrac{1}{x}$ helyettesítéssel. Ekkor $dx=-\dfrac{1}{t^2}$, és

$$I=\int t\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arccos t+C=\arccos\frac{1}{x}+C\,.$$

Látható, hogy ez utóbbi helyettesítés kevesebb számolással jár.

Megjegyzés. Az $\displaystyle\int\frac{dt}{\operatorname{ch}t}$ integrált más módon is kiszámíthatjuk. Bővítve a törtet $\operatorname{ch}t$-vel és $\operatorname{ch}^2 t$ helyére $(1+\operatorname{sh}^2 t)$-et írva, $u=\operatorname{sh}t$ helyettesítéssel

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}t\,dt}{1+\operatorname{sh}^2 t}=\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u+C=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}t)+C=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+C\,.$$

Más átalakítással és $u=e^t$ helyettesítéssel:

$$I=\int\frac{dt}{\operatorname{ch}t}=\int\frac{dt}{\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)}=2\int\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt=2\int\frac{du}{1+u^2}=2\operatorname{arctg}(e^t)+C\,.$$

Az $x=\operatorname{ch}t$ egyenlőségből $t=\operatorname{arch}t=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, tehát $I=2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$.

Differenciálással meggyőződhetünk arról, hogy mind a négy módon a megadott függvény *határozatlan integrálját kaptuk meg az $(1, \infty)$ intervallumban. Ez azt is jelenti, hogy az eredmények jobb oldalán első tagként álló függvények legfeljebb konstans összeadandóban térhetnek el egymástól.*

Feladatok

A **T 12.13** alatt felsorolt helyettesítések valamelyikével vagy más alkalmas helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi feladatokat (a, b, c konstansok és $a > 0$).

117.▷ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, **118.** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, **119.** $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$,

120. $\int \sqrt{5+3x^2}\,dx$, **121.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, **122.**▷ $\int x\sqrt{c+x}\,dx$,

123. $\int \frac{dx}{x\sqrt{c+x}}$, **124.** $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$, **125.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$,

126.▷ $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, **127.** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$, **128.**▷ $\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$,

129.▷ $\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$, **130.**▷ $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, **131.** $\int \sqrt{5-3x^2}\,dx$,

132. $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$, **133.**▷ $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$, **134.** $\int \sqrt{5-2x+x^2}\,dx$,

135. $\int \sqrt{15+2x-x^2}\,dx$, **136.** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$,

137. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$, **138.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$, **139.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x^2}}$,

140. $\int \frac{dx}{x^4+x}$, **141.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$, **142.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$,

143. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$, **144.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$, **145.** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$,

146.▷ $\int \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}\,dx$, **147.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, **148.** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$,

149. $\int \frac{dx}{\cos x}$, **150.** $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$, **151.** $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x}$,

152.▷ $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$, **153.**▷ $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$, **154.**▷ $\int \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}\,dx$,

155. $\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$, **156.**▷ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$, **157.**▷ $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$,

158. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, **159.** $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,dx$, **160.**▷ $\int \frac{dx}{c+b\cos x}$.

Racionális törtfüggvények integrálása

T 12.16 *A valós együtthatós racionális $R(x)$ törtfüggvény maradékos osztással*

$$R(x) = g(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

alakra hozható, ahol $P(x)$ fokszáma kisebb $Q(x)$ fokszámánál.

T 12.17 *A $Q(x)$ valós együtthatós polinomfüggvény egyértelműen előállítható elsőfokú, és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomfüggvények szorzataként:*

$$Q(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1}\cdots\left(x^2+b_lx+c_l\right)^{\beta_l}.$$

T 12.18 *Ha $Q(x)$-nek az előző tétel szerinti felbontása ismeretes, akkor $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ törtfüggvényt a*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{A_1^{(k)}}{x-x_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} +$$

$$+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{\left(x^2+b_1x+c_1\right)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}x + C_{\beta_1}^{(1)}}{\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{B_1^{(l)}x + C_1^{(l)}}{x^2+b_lx+c_l} + \frac{B_2^{(l)}x + C_2^{(l)}}{\left(x^2+b_lx+c_l\right)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_l}^{(l)}x + C_{\beta_l}^{(l)}}{\left(x^2+b_lx+c_l\right)^{\beta_l}} + \cdots$$

képlet szerint elemi törtfüggvények (parciális törtek) összegére bonthatjuk. Az itt még ismeretlen $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ számok meghatározására egyenletrendszert írhatunk fel.

P 12.19 *Számítsuk ki az $\dfrac{1}{x^6+x^4}$ függvény határozatlan integrálját.*

A nevezőt a **T 12.17** *szerinti alakra hozzuk: $x^6 + x^4 = x^4(x^2+1)$. Ezt felhasználva a függvényt előállítjuk elemi törtek összegeként:*

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

A jobb oldalt összevonva, a két oldal számlálójának azonosan egyenlőnek kell lennie:

$$1 = A_1x^3(x^2+1) + A_2x^2(x^2+1) + A_3x(x^2+1) + A_4(x^2+1) + (Bx+C)x^4.$$

Átrendezve x hatványai szerint:

$$1 = (A_1+B)x^5 + (A_2+C)x^4 + (A_1+A_3)x^3 + (A_2+A_4)x^2 + A_3x + A_4.$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításával:

$$A_4 = 1,\ A_3 = 0,\ A_1 + B = 0,\ A_2 + C = 0,\ A_1 + A_3 = 0,\ A_2 + A_4 = 0.$$

Ezekből $A_1 = 0$, $A_2 = -1$, $B = 0$, $C = 1$. Tehát

$$\int \frac{dx}{x^6+x^2} = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Amennyiben $Q(x)$ gyökei között több egyszeres gyök van, az $A_j^{(i)}$, $B_j^{(i)}$, $C_j^{(i)}$ számok meghatározását célszerűbben az alábbi példában szemléltetett módon végezhetjük.

P 12.20 *Számítsuk ki az* $\dfrac{x^2}{1-x^4}$ *függvény határozatlan integrálját. Elemi törtek összegére bontjuk a függvényt:*

$$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{-x^2}{x^4-1}=\frac{-x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ebből $-x^2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$.
Legyen $x=1$ *; akkor* $-1=4A$ *, azaz* $A=-\frac{1}{4}$.
Legyen $x=-1$*; akkor* $-1=-4B$*, azaz* $B=\frac{1}{4}$.
Legyen $x=0$ *; akkor* $0=A-B-D$*, azaz* $D=-\frac{1}{2}$.
A C*-t az* x *együtthatóiból állapítjuk meg:* $A+B-C=0$*, azaz* $C=0$*. Tehát*

$$\int\frac{x^2}{1-x^4}\,dx=\int\frac{-x^2}{x^4-1}\,dx=\int\left(-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\,.$$

Feladatok

Integráljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket, illetve helyettesítéssel ilyenekre visszavezethető függvényeket.

161.▷ $\dfrac{1}{x^3-8}$, **162.** $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, **163.** $\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$,

164. $\dfrac{x-3}{x^3-x}$, **165.** $\dfrac{1}{x^4-x^2}$, **166.** $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

167.▷ $\dfrac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$, **168.**▷ $\dfrac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}$, **169.** $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$,

170. $\dfrac{x}{x^3-1}$, **171.**▷ $\dfrac{1}{x(3+5x^6)}$, $(u=x^6)$, **172.**▷ $\dfrac{8}{7x+3x^5}$, $(u=x^4)$,

173. $\dfrac{6dx}{e^x-3}$, **174.**▷ $\dfrac{\ln x+1}{x^x-1}$, **175.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Vegyes feladatok.

176.▷ Határozzuk meg az $\displaystyle\int xf''(x)\,dx$ integrált.

177. Határozzuk meg az $\displaystyle\int f'(2x)\,dx$ integrált.

178.▷ Határozzuk meg az f függvényt, ha $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$.

179.▷ Határozzuk meg az f függvényt, ha $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

180. Legyen f folytonos és invertálható függvény, inverzét jelölje f^{-1}. Mutassuk meg, hogy ha
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
akkor
$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$
Ellenőrizzük e formulát az x^n, e^x, $\arcsin x$ függvényekkel!

Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét.

181.$^\triangleright$ $\displaystyle\int |x|\,dx$, **182.** $\displaystyle\int x|x|\,dx$, **183.** $\displaystyle\int (|1+x|-|1-x|)\,dx$,

184. $\displaystyle\int e^{-|x|}\,dx$, **185.** $\displaystyle\int \max(1,x^2)\,dx$, **186.**$^\triangleright$ $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$,

187. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$, **188.** $\displaystyle\int x\ln(4+x^4)\,dx$, **189.**$^\triangleright$ $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^6-10x^3+9}$,

190. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}$, **191.** $\displaystyle\int \frac{2x-3}{9x^2-12x+4}\,dx$, **192.** $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}\,dx$,

193.* $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$, **194.** $\displaystyle\frac{1}{x^2-x+2}$, **195.** $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-2x^2-1}\,dx$,

196.$^\triangleright$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$, **197.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, **198.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$.

199.$^\triangleright$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$, **200.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$, **201.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$,

202. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$, **203.** $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$, **204.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$,

205. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$, **206.** $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$, **207.** $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$,

208. $\displaystyle\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$, **209.** $\displaystyle\int x^2a^x\,dx\ (a>1)$, **210.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx$,

211. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\operatorname{sh} x}$, **212.*** $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{sh} x)^2}$, **213.** $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx$.

214. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$, **215.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$,

216. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+3\cos^2 x}\,dx$, **217.** $\displaystyle\int 2\operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx$,

218. $\displaystyle\int \sin x\cos x\sqrt{\cos^6 x+\sin^6 x}\,dx$, **219.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$,