## 13. Határozott integrál (megoldások)

**1.** $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{5}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{91}{60}.$

**2.** A bal végpontokat választva: $x_i=\frac{i}{n}$, $x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n}$, $f(\xi_i)=\frac{i-1}{n}$.

$$\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n(i-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

A jobb végpontokat választva: $f(\xi_i)=\frac{i}{n}$,

$$\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

**3.** $\frac{1}{3}$. **4.** 4.

**5.** $\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{4}{2}-\frac{0}{2}=2.$

**6.** $\int_0^4\left(5x^3+1\right)dx=\left[\frac{5x^4}{4}+x\right]_0^4=324.$

**7.** A **T 13.2** (6) tételt alkalmazzuk: a $[2,4]$ intervallumon az $e^{-x^2}$ és a $\sin\frac{\pi x}{4}$ függvény is monoton csökkenő, így

$$0\le e^{-x^2}\sin\frac{\pi x}{4}\le e^{-4},\quad\text{tehát}\quad 0\le I\le 2e^{-4}.$$

**8.** Az integrál–középértéktétel alapján $\int_{-4}^{-1}3x^2\,dx=3c^2\cdot(-1-(-4))$.
Mivel $\int_{-4}^{-1}3x^2\,dx=[x^3]_{-4}^{-1}=-1-(-64)=63$, ezért $63=9c^2$, azaz $c=\pm\sqrt{7}$.
A $[-4,-1]$ intervallumba a $c=-\sqrt{7}$ érték esik.

**9.** $c=\frac{2257}{288}=7,837.$ **10.** $c=\arccos\sqrt{\frac{\pi}{4}}.$ **11.** $c=\arcsin\frac{2}{\pi}.$

**12.** $c_1=\arcsin\frac{2}{\pi},\quad c_2=\pi-\arcsin\frac{2}{\pi}.$

**13.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{1-(x/2)^2}}=\lim_{b\to 2-0}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^b=\frac{\pi}{2}.$

**14.** $\lim_{a\to-2-0}\left[5(x+2)^{1/5}\right]_{-3}^a+\lim_{b\to-2+0}\left[5(x+2)^{1/5}\right]_b^0=5(1+\sqrt[5]{2}).$

**15.** $\sqrt[3]{2}\lim_{a\to+0}\int_a^2 x^{-\frac{1}{3}}\,dx=3.$ **16.** $\int_{-1}^1\frac{1}{x^{2/3}}\,dx=6.$

**17.** $\frac{14}{5}$. **18.** $\sqrt{3}$. **19.** Nem konvergens.

**20.** Parciális integrálás után 2. **21.** 2.

**22.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1.$

**23.** Nem konvergens.

**24.** $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}\right).$

**25.** Nem konvergens.

**26.** $-\dfrac{1}{2}.$

**27.** 1, (mert $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=0.$)

**28.** Nem konvergens.

**29.** $\dfrac{1}{\ln 2}.$

**30.** A $\sin x - \cos x$ korlátossága miatt $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}(\sin x-\cos x)=0$. Ezért az improprius integrál értéke: $\dfrac{1}{2}.$

**31.** 2.

**32.** $\dfrac{1}{4}.$

**33.** $\displaystyle\int_0^b \ln x\,dx = \lim_{a\to+0}\left[x\ln x - x\right]_a^b = b\ln b - b - \lim_{a\to+0}(a\ln a - a).$

Mivel $\displaystyle\lim_{a\to+0} a\ln a = \lim_{a\to+0}\frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a\to+0}\frac{1/a}{-1/a^2}=0$, ezért $b\ln b - b = 0$, amiből a keresett $b$-re $b=e$.

**34.** $\displaystyle 32\left(1-\frac{1}{\ln 4}\right)+\frac{15}{\ln^2 4}.$

**35.** $\dfrac{\pi}{2}.$

**36.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}.$

**37.** Nem konvergens.

**38.** Nem konvergens.

**39.** 2.

**40.** $\dfrac{\pi}{4}$ .

**41.** 6.

**42.**

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2||x-3|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)(3-x)}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} +$$

$$+\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = -\ln(3-2\sqrt{2})+\pi+\ln(2\sqrt{2}+3) = \ln(12\sqrt{2}+17)+\pi \approx$$

$$\approx 6.667\,.$$

**43.** Divergens, mivel a $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$ $\Big($ és a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx\Big)$ integrál divergens.

**44.**

$$p>1: \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^a = \frac{1}{p-1}$$

$$p<1: \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^a = \infty$$

$$p=1: \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\ln x\right]_1^a = \infty\,.$$

**45.** Az előző feladathoz hasonlóan.

**46.** A keresett $T$ terület: $T=\int_0^3 \frac{dx}{2x+4}=\frac{1}{2}\left[\ln(2x+4)\right]_0^3=\ln\frac{\sqrt{10}}{2}$.

**47.** $\frac{59}{6}$.

**48.** A függvény grafikonja az $\left[1,\sqrt[3]{3}\right)$ intervallumon az $x$ tengely alatt, a $\left(\sqrt[3]{3},2\right]$ intervallumon az $x$ tengely felett halad. Ezért a keresett $T$ terület:

$$T=-\int\limits_1^{\sqrt[3]{3}}(x^3-3)\,dx+\int\limits_{\sqrt[3]{3}}^{2}(x^3-3)\,dx=\frac{1}{4}\left(18\sqrt[3]{3}-19\right).$$

**49.** A függvény a $[0,1)$ intervallumon az $x$ tengely alatt, az $(1,2]$ intervallumon az $x$ tengely felett halad. Ezért a keresett $T$ terület:

$T=-\int_0^1 \operatorname{sh}(x-1)\,dx+\int_1^2 \operatorname{sh}(x-1)\,dx=2(\operatorname{ch}1-1)$.

**50.** $\frac{163}{15}$. **51.** $\frac{2+4\sqrt{2}}{3}$. **52.** $\frac{\pi}{4}$. **53.** $\frac{46}{9}$.

**54.** A függvény grafikonja a $[0,2)$ intervallumon az $x$ tengely felett, a $(2,4]$ intervallumon az $x$ tengely alatt halad. Ezért a keresett $T$ terület: $T=$
$\int_0^2(1-3^{x-2})\,dx-\int_2^4\left(1-3^{x-2}\right)\,dx=\left[x-\frac{3^{x-2}}{\ln 3}\right]_0^2-\left[x-\frac{3^{x-2}}{\ln 3}\right]_2^4=\frac{64}{9\ln 3}$.

**55.** A függvény grafikonja az $[1,2)$ intervallumon az $x$ tengely alatt, a $(2,e]$ intervallumon az $x$ tengely felett halad. A keresett $T$ terület:

$T=-\int_1^2 \ln\frac{x}{2}\,dx+\int_2^e \ln\frac{x}{2}\,dx=3-(e+1)\ln 2$.

**56.** $\frac{52}{3}$. **57.** $\frac{8}{5}$. **58.** 20. **59.** $\frac{1}{20}$.

**60.** Legyen $1-x=\cos^3 t$; $\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t\sin t$.

Ha $x=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$, akkor $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t=\frac{\pi}{6}$.

Ha $x=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3$, akkor $\cos t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{\pi}{3}$.

$$T=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\left(1-\left[1-\cos^2 t\right]^{3/2}\right)3\cos^2 t\sin t=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\sin^3 t)3\cos^2 t\sin t=$$

$$\left[-\cos^3 t-\frac{3}{16}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+\frac{\sin^3 2t}{16}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{21\sqrt{3}-8}{64}-\frac{\pi}{32}.$$

**61.** $T=\int_1^4 \lg\frac{4}{x}\,dx-\int_4^6 \ln\frac{4}{x}\,dx=\lg\frac{6^6\cdot e}{4^7}$.

**62.** 2. **63.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. **64.** $\frac{(5e-1)^2}{5e(1+\ln 5)}$.

**65.** Az $y = 2x^2 - 1$ egyenletű parabola és az $x$-tengely metszéspontjai $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, így $T = \left|\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2x^2 - 1)\, dx\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**66.** $T = \int_0^{1+\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{2})$.

**67.** $T = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2)\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**68.** $T = \int_{1/3}^{4} \left(\frac{13}{3} - x - \frac{4}{3x}\right) dx = \frac{143}{18} - \frac{4}{3}\ln 12$.

**69.** Szimmetria miatt (l. az ábrát)

$$T = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 - 2 - x^4)\, dx + \\ + 2 \cdot \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2)\, dx = \frac{24 - 8\sqrt{2}}{5}.$$

**70.** $T = 2\int_0^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$.

**71.** $T = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \frac{4}{3}$.

**72.** $T = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}$.

**73.** $T = \int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{x}{2})\, dx = \frac{4}{3}$.

**74.** $T = \int_0^1 \big(1 - x - (1 - 2\sqrt{x} + x)\big)\, dx = \frac{1}{3}$.

**75.** Az $y^2 = x + 3$ egyenletű parabola az $x$ tengelyre szimmetrikus és azt a $(-3, 0)$ pontban metszi. A feladatbeli két görbe metszéspontjai: $(-2, -1)$ és $(6, 3)$. Ezért:

$$T = 2 \cdot \int_{-3}^{-2} \sqrt{x + 3}\, dx + \int_{-2}^{6} \left(\sqrt{x + 3} - \frac{x}{2}\right) dx\,.$$

Egyszerűbb a terület kiszámítása, ha az $x$-t tekintjük $y$ függvényének. Ekkor $T = \int_{-1}^{3} \big(2y - (y^2 - 3)\big)\, dy = \frac{32}{3}$.

**76.** Egyszerűbb az $y$ tengely és a görbék közötti területek különbségét kiszámítani: $T = 2\int_0^4 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})\, dy = \frac{32}{3}$.

**77.** Egyszerűbb a számítás, ha az $y$ tengely és a görbék közötti területek különbségét vesszük: $T = \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{4}y^2 + 1 - y^2\right) dy = \frac{8}{3}$.

**78.** Az $x$-et tekintjük $y$ függvényének. A $\sqrt{y} = 2 - y$ egyenletből $y = 1$. $T = \int_0^1 \big((2 - y) - \sqrt[3]{y}\big)\, dy = \frac{3}{4}$.

**79.** $T = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\int\limits_0^a a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$. Legyen $\frac{x}{a} = \sin t$; ekkor $t_1 = 0$, $t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ és $T = 4\int_{t_1}^{t_2} a\sqrt{1 - \sin^2 t} a\cos t\, dt = 4a^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 t\, dt = a^2\pi$.

**80.** $T = \int\limits_a^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$. $\frac{x}{a} = \sin t$ helyettesítéssel $T = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\, dt = ab\pi$.

**81.** Az integrálás közben $\frac{x}{4} = \sin t$ helyettesítést alkalmazva

$$T = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(-2 + \sqrt{4^2 - x^2}\right) dx = 2\int_0^{2\sqrt{3}} \left(-2 + 4\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\right) dx =$$

$$2\left[-2x + 8\arcsin\frac{x}{4} + 2\cdot x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

**82.** A két kör metszéspontjainak koordinátái: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Ezért a keresett terület $x$-tengely feletti része:

$$T_1 = 2\int_0^{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{4 - x^2})\, dx + 2\int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx =$$

$$= 4\left[x - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]_0^{\sqrt{3}} + 4\left[\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]_{\sqrt{3}}^2 =$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

A keresett $T$ terület az $x$-tengely alatti félkör területének és $T_1$-nek összege: $T = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$.

**83.** $T = \int_0^1 \left(3x^{1/3} - 3x^{2/3}\right) dx = \frac{9}{20}$.

**84.** $T = \int_0^{\pi/2} (x - \sin)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$.

**85.** $T = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos x - (4x^2 - \pi^2)\right) dx = 2 + \frac{2}{3}\pi^3$.

**86.** $3 - e$.

**87.** $T = \int_0^4 xe^x\, dx = 3e^4 + 1$.

**88.** $T = \int_0^2 (16x - x\cdot 4^x)\, dx = 32\left(1 - \frac{1}{\ln 4}\right) + \frac{15}{\ln^2 4}$.

**89.** $\frac{9}{\ln 4}$.

**90.** $T = \frac{6}{\ln 4}$.

**91.** A görbék metszéspontja: $x = 1$, így:
$T = \int_0^1 \left(5^{1-x} + 2 - 3^x\right) dx = 2 - \frac{2}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 5}$.

**92.** A görbék metszéspontja $x = 3$ (l. **ábra**):

$$T = \int_3^6 \left( \ln \frac{x}{3} - \left(1 - 2^{x-3}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{7}{\ln 2} + 6(\ln 2 - 1)\,.$$

**93.** $2(e^2 + 1)$.

**94.** $4(\ln 4 - 1)$.

**95.** $T = \int_1^3 \ln x\, dx + \int_3^9 \left(\ln x - 2\ln \frac{x}{3}\right) dx = 4\,.$

**96.** $3 - e$. (L. **12. 98.**)

**97.** A metszéspontok az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ helyeknél vannak.

$$T = \int_1^2 \ln x\, dx + \int_2^5 \ln \frac{8-x}{3}\, dx = 4(\ln 4 - 1).$$

**98.** A metszéspontok az $x_1 = 1$, $x_2 = 9$ helyeknél vannak.

$T = \int_1^9 \left(\ln^2 3 - \ln^2 \frac{x}{3}\right) dx = 20\ln 3 - 16.$ Lásd a fenti jobboldali ábrát.

**99.** $x = a(1 - \cos t)$, $T = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\, dt = 3a^2\pi.$

**100.** $\frac{1}{6}$.

**101.** $a^2\pi$.

**102.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

**103.** $\frac{3ab\pi}{32}$, l. **12.24.**

**104.** $-a^2\pi(\pi^2 - 12)/48$.

**105.** $x = 3\cos^2 t \sin t$, $T = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \sin^3 t) 3\cos^2 t \sin t\, dt = \frac{21\sqrt{3} - 8 - 2\pi}{64}$.

**106.** $a^2(15\sqrt{3}/8 - 1 - \pi)$.

**107.** $\pi - \frac{\pi^2}{4}$.

**108.** $2a^2\pi\,.$

**109.** $T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\, d\varphi = a^2\pi.$

**110.** $\left(\frac{r_1^2}{2a}\right)^2$, $(r_1 = r(\varphi_1))$.

**111.** $\frac{a(a - r_1)}{2}$, $(r_1 = r(\varphi_1))$.

**112.** $\frac{a^2\pi}{16}$.

**113.** $\dfrac{a^2}{4}$

**114.** $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a^2}{2}+b^2\right)$.

**115.** A **12.157.** szerint $T=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)^2}=$ (l. **11.157**)

$$-\frac{1/2}{1^2-(1/2)^2}\left[\frac{\frac{1}{2}\sin\varphi}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi}-\frac{2}{\sqrt{1^2-(1/2)^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**116.** $T=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{1}{(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\dfrac{1}{8}\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{d\varphi}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}=\dfrac{1}{4}\left[\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\dfrac{\varphi}{2}\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=$
$\dfrac{1}{3}(5+4\sqrt{2})$.

**117.** $\dfrac{4a^2}{3}$.

**118.** $\dfrac{r_1^2-a^2}{4b}$, $(r_1=r(\varphi_1))$.

**119.** $t=\operatorname{tg}(\varphi)$-re $T=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=2ab\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)\right]_0^{\pi/2}=$
$ab\pi$.

**120.** $3a^2\pi$ .

**121.** $T=\dfrac{1}{6}$.

**122.** $a^2\pi$.

**123.** $x=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$, $x\dot{y}-\dot{x}y=a^2(t\sin t-2+2\cos t)$, amiről kimutatható, hogy mindenütt nempozitív. $T=3a^2\pi$.

**124.** $\dfrac{2}{3}$.

**125.** $T=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

**126.** A vizsgált intervallumban $x$, $\dot{x}$ és $y$ pozitív, $\dot{y}$ negatív.
$x\dot{y}-\dot{x}y=-3\sin^2 t\cos t-3\cos^2 t\sin t+\dfrac{3}{8}(1-\cos 4t)$.

$$T=\left|\frac{1}{2}\left[-\sin^3 t+\cos^3 t+\frac{3}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\right|=\frac{21\sqrt{3}-8-2\pi}{64}.$$

**127.** $\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$.

**128.** $T=t_1$.

**129.** $\dfrac{7}{6}$.

**130.** $2\ln a$.

**131.** $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$.

**132.** $\dfrac{3}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$.

**133.** Ebben az esetben a szektor megegyezik az ugyanehhez a függvényhez és intervallumhoz tartozó görbevonalú trapézzal. Területe:
$T=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(x^{1/3}\left(1-x^{1/3}\right)^2+\left(1-x^{1/3}\right)^3\right)dx$ vagy $T=\int_0^1\left(1-x^{1/3}\right)^3dx$;
$t=x^{1/3}$ helyettesítés után: $T=\dfrac{1}{20}$.

**134.** $1/12$.

**135.** $\dfrac{e-2}{2}$.

**136.** $\dfrac{e}{2}+\ln 16-4$.

**137.** $T=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4\cos^2\varphi-\cos^2\varphi)\,d\varphi=\dfrac{3\pi}{16}+\dfrac{3}{8}$.

**138.** $T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(4\cos\varphi - \dfrac{1}{\cos\varphi}\right)^2 d\varphi = \dfrac{5}{2}.$

**139.** $T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg}^2 2\varphi \, d\varphi = \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \dfrac{1-\cos^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\, d\varphi = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2} - \varphi\right]_0^{\pi/8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\pi}{16}.$

**140.** $T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(e^{2\varphi} - \varphi^2\right) d\varphi = \dfrac{1}{12}\left(3e^{2\pi} - 2\pi^3 - 3\right).$

**141.** $T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(e^{2\varphi} - e^{\varphi}\right) d\varphi = \dfrac{1}{4}\left(e^{2\pi} - 2e^{\pi} + 1\right).$

**142.** $T = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(4^2 - \dfrac{4}{\cos^2\varphi}\right) d\varphi = \dfrac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$

**143.** Szimmetria miatt $T = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/3}\dfrac{4d\varphi}{\cos^2\varphi} + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4^2\, d\varphi\right) = 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$

**144.** A két kör metszéspontjai a $2 = 4\sin\varphi$ egyenletből: $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

$T = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(16\sin^2\varphi - 2^2)\, d\varphi = \dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$

**145.** Az ívhosszúságot $s$-sel jelölve: $s = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\, dx = \sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1 =$
$= \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}).$

**146.** $s = \operatorname{arsh} 1 + \sqrt{2} = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$

**147.** $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$ **148.** $\dfrac{p}{2}\operatorname{arsh}\dfrac{a}{p} + \dfrac{a}{2}\sqrt{1+\dfrac{a^2}{p^2}}.$

**149.** A $[0, a]$ intervallumon $x \geq 0$ és $x - 3a < 0$. Így a $[0, a)$ intervallumhoz tartozó, $x$ tengely alatti görbeíven $y = \dfrac{x-3a}{3}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$; ebből $s = \int_0^a \dfrac{x+a}{2\sqrt{ax}}\, dx = \dfrac{4}{3}a.$

**150.** Két ilyen ív van a görbén; az alábbi számítás mind a kettőre érvényes. Implicit függvényként differenciálva: $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$, ebből

${y'}^2 = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$. Másrészt az eredeti egyenletből: $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{2/3} = \left(\dfrac{a}{x}\right)^{2/3} - 1$, tehát

${y'}^2 = \left(\dfrac{a}{x}\right)^{2/3} - 1.$ $s = \int_0^a \left(\dfrac{a}{x}\right)^{1/3} dx = \sqrt[3]{a}\int_0^a \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \sqrt[3]{a}\left[\dfrac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^a = \dfrac{3}{2}a.$

**151.** $s = 1 - \operatorname{arcth} 3 + \operatorname{arcth} 2 = 1 - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}.$

**152.** $s = \int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = -\dfrac{1}{2} + 2\operatorname{arcth}\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} + \ln 3.$

**153.** $\ln\sqrt{3}.$ **154.** $\ln\sqrt{3}.$ **155.** $\dfrac{a(a+2)}{2}.$

**156.** Polárkoordinátásan:

(1) $$r^2 = y^2 + x^2 = \frac{2ax^2}{2a-x},$$

amiből $x = r\cos\varphi$ helyettesítéssel és az így kapott egyenlet megoldásával:

(2) $$r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

$r^2 + \dot{r}^2 = 4a^2\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}(1+3\cos^2\varphi);$

$\int\sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi = 2a\int\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi$. (Ez utóbbi integrál kiszámításához lásd a 12.213. feladatot). A határok polárkoordinátásan: Ha $x=0$, akkor (1)-ből $r=0$, és így (2)-ből $\varphi=0$; ha $x=\dfrac{5}{3}a$, akkor (1)-ből $r=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 5a$, és így $x = r\cos\varphi$-ből $\dfrac{5}{3}a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}5a\cos\varphi$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$. Ezeket felhasználva

$s = -2\sqrt{3}a\left[-\operatorname{cth}\operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos\varphi) + \operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos\varphi)\right]_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}} =$

$2a\left(1+\sqrt{3}\ln\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$

**157.** $s = \operatorname{arsh}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3}+2) + 2\sqrt{3}.$

**158.** $\dfrac{5}{2}.$

**159.** $\dfrac{1}{27}\left(\sqrt{\left(4+9t_1^2\right)^3} - 8\right).$

**160.** $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arsh} t_1 + t_1\sqrt{1+t_1^2}\right).$

**161.** $\dot{x} = -\sin t,\ \dot{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos 2t,$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sin^2 t + \frac{1}{8}\cos^2 2t = \frac{1-\cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t}{2} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t\right)^2}{2}.$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}.$$

**162.** $8a.$

**163.** $2a\pi^2.$

**164.** $\dot{x} = -5a\cos^4 t\sin t,\ \dot{y} = 5a\sin^4 t\cos t.$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = 25a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^6 t + \sin^6 t)$. Kiszámítjuk a (zárt) görbe hosszának negyedét, vagyis a $[0,\dfrac{\pi}{2}]$-n integrálunk, és azt négyszer vesszük.

$s = 4\cdot 5a\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\,dt$. (l. **12.215.**)

$$s = -\frac{4\cdot 5a}{16\sqrt{3}}\left[\operatorname{arsh}(\sqrt{3}\cos 2t) + \sqrt{3}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{5a}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arsh}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) = 5a\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right).$$

**165.** $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \cos^2 t(1+16\sin^2 t)$. $s = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{1+16\sin^2 t}\,dt$. Legyen $4\sin t = \operatorname{sh} u$, akkor $s = \frac{1}{4}\displaystyle\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,du = \dfrac{1}{8}\ln(4+\sqrt{17}) + \dfrac{1}{2}\sqrt{17}.$

**166.** $\sqrt{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)$.

**167.** $a\ln\dfrac{a}{y_1}$, ahol $y_1=y(t_1)$.

**168.** $s=\operatorname{arsh}1=\ln(1+\sqrt{2})$.

**169.** $s=2\operatorname{arth}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\ln(2+\sqrt{3})$.

**170.** $\underset{\sim}{x}^2+\underset{\sim}{y}^2=\dfrac{9}{4}\operatorname{sh}^2 2t\operatorname{ch}2t$; $s=\dfrac{1}{2}\left[(\operatorname{ch}2t_1)^{3/2}-1\right]$.

**171.** $\underset{\sim}{x}^2+\underset{\sim}{y}^2=\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{ch}t\right)^2$. $s=\ln a+\dfrac{a^2-1}{4a}$.

**172.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arch}t_1^2-\operatorname{arch}t_2^2\right]$; az integrált helyettesítéssel számíthatjuk ki.

**173.** $\operatorname{sh}^2 t_1$.

**174.** $\underset{\sim}{r}=0$, $r^2+\underset{\sim}{r}^2=a^2$. $s=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2}\,d\varphi=a[\varphi]_0^{2\pi}=2a\pi$.

**175.** $\dfrac{a}{2}\left(\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}+\operatorname{arsh}\varphi_1\right)$.

**176.** $a\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{\varphi_1{}^2+1}}{\varphi_1}+\ln\dfrac{\varphi_1+\sqrt{\varphi_1{}^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

**177.** $2a$.

**178.** $8\sqrt{3}$.

**179.** $8$.

**180.** $r^2+\underset{\sim}{r}^2=\dfrac{a^2}{\cos^6\frac{\varphi}{2}}$. Mivel $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C$, (lásd a plt. **12.193.** feladatot), $s=a\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}=a\left[\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\pi/4}=$ $a\left(\sqrt{2}+\ln\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}\right)=a(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

**181.** $p\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$.

**182.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

**183.** $8a\sin\dfrac{\varphi_1}{2}$.

**184.** $\dfrac{3a\pi}{2}$.

**185.** Átalakításokkal $r^2+\underset{\sim}{r}^2=a^2\dfrac{\operatorname{ch}^2\varphi}{(1+\operatorname{ch}\varphi)^2}$; $t=\operatorname{th}\dfrac{\varphi}{2}$ helyettesítéssel $s=a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$.

**186.** $a(\varphi_1-r_1)$, ahol $r_1=r(\varphi_1)$.

**187.** $\dfrac{8a}{3}$.

**188.** $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi_1}-1\right)$.

**189.** $\dfrac{16}{3}\pi$.

**190.** $12\pi$.

**191.** $\dfrac{3\pi^2}{8}$.

**192.** $\dfrac{\pi}{2}(2+\operatorname{sh}2)$.

**193.** $\dfrac{\pi}{2}$.

**194.** $\pi(3\ln^2 3-6\ln 3+4)$.

**195.** $\dfrac{\pi}{4}$.

**196.** $\dfrac{4a^3\pi}{3}$.

**197.** $\dfrac{4a^3\pi}{3}$.

**198.** $V = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \frac{16}{15}\pi.$ **199.** $V = \pi \int_{-1}^1 \left(1-x^{2/3}\right)^3\,dx = \frac{32\pi}{105}.$

**200.** $\frac{4ab^2\pi}{3}.$

**201.** $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{125}-1\right).$

**202.** A kiszámítandó felszínt $A$-val jelölve $A = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx.$
A $\cos x = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel
$\int \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2}\right] + C$; így
$A = -\pi\left[\operatorname{arsh}\cos x + \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\right]_0^\pi = \pi\left(2\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})\right).$

**203.** $A = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx = \pi\left[\frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{arsh}\cos^2 x\right]_0^{\pi/4} =$
$\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}).$ (Az integrál kiszámításához lásd az **12.214.** feladatot.)

**204.** $a^2\pi(2+\operatorname{sh} 2).$

**205.** $y\sqrt{1+y'^2} = \left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}$, (az $y'$ legegyszerűbben az eredeti egyenlet mindkét oldalának differenciálásával számítható ki). Legyen $x = a\cos^3 u$.
$A = 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u\cos u\,du = 6a^2\pi\left[\frac{\sin^5 u}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{6a^2\pi}{5}.$

**206.** $4a^2\pi.$

**207.** $y\sqrt{1+y'^2} = b\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}$, ahol $\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$
$A = 2b\cdot 2\pi\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\,dx.$ Legyen $\frac{\varepsilon x}{a} = \sin u.$
$A = \frac{4ab\pi}{\varepsilon}\int_{u_1}^{u_2}\cos^2 u\,du = \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\left[u + \sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\right]_{u_1}^{u_2} =$
$= \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\left[\arcsin\frac{\varepsilon x}{a} + \frac{\varepsilon x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\right]_0^a = 2b\pi\left(\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon + b\right).$

**208.** $A = 2\pi\int_{-2}^2 (\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} x)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \pi\operatorname{sh} 4 - 4\pi.$

**209.** $A = 2\pi\int_{-1}^1 (1-x^2)\sqrt{1+(2x)^2}\,dx.$
$2x = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel $A = \frac{\pi}{16}\left(17\operatorname{arsh} 2 + 14\sqrt{5}\right).$

**210.** $4a^2\pi.$

**211.** $A = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt = \frac{6a^2\pi}{5}.$

**212.** $A = 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\, dt = \dfrac{64a^2\pi}{3}.$

**213.** $y\sqrt{x^2+y^2} = 4\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{3/2}\sin t.$

$A = 2\pi \cdot 4\sqrt{2}a^2 \cdot \int_0^{\pi}(1-\cos t)^{3/2}\sin t\, dt = \dfrac{128a^2\pi}{5}.$

**214.** $x^2+y^2 = 2e^{2t},\ \ A = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} e^{2t}\cos t\, dt = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left[e^{2t}(\sin t + 2\cos t)\right]_0^{\pi/2} =$
$\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left(e^{\pi}-2\right).$

**215.** $M_x = \dfrac{1}{14},\ \ M_y = \dfrac{1}{5},\ \ T = \dfrac{1}{4},\ \ x_s = \dfrac{4}{5},\ \ \ y_s = \dfrac{2}{7}.$

**216.** $M_x = \dfrac{3}{8},\ \ \ M_y = 3,\ \ T = \ln 4,\ \ \ x_S = \dfrac{3}{\ln 4} = 2,16;\ \ \ y_S = \dfrac{3}{8\ln 4} = 0,27.$

**217.** $M_x = \dfrac{13}{81},\ \ \ M_y = \ln 3,\ \ \ T = \dfrac{2}{3},\ \ \ x_S = \dfrac{3\ln 3}{2} = 1,65,\ \ \ y_S = \dfrac{13}{54} = 0,24.$

**218.** $M_x = \dfrac{2a^3}{3},\ \ \ M_y = 0,\ \ \ T = \dfrac{a^2\pi}{2},\ \ \ x_S = 0,\ \ \ y_S = \dfrac{4a}{3\pi}.$

**219.** $M_x = \dfrac{2ab^2}{3},\ \ \ M_y = 0,\ \ \ T = \dfrac{ab\pi}{2},\ \ \ x_S = 0,\ \ \ y_S = \dfrac{4b}{3\pi}.$

**220.** $M_x = \dfrac{2a^3}{3},\ \ \ M_y = 0,\ \ \ T = \dfrac{a^2\pi}{2},\ \ \ x_S = 0,\ \ \ y_S = \dfrac{4a}{3\pi}.$

**221.** $M_x = \dfrac{2ab^2}{3}.\ \ \ M_y = 0,\ \ \ T = \dfrac{ab\pi}{2},\ \ \ x_S = 0,\ \ \ y_S = \dfrac{4b}{3\pi}.$

**222.** $M_x = \dfrac{5}{2}a^3\pi,\ \ \ M_y = 3a^3\pi^2,\ \ \ T = 3a^2\pi,\ \ \ x_S = a\pi,\ \ \ y_S = \dfrac{5a}{6}.$
(A $T$-re nézve l. a **99**. feladatot.)

**223.** $M_x = \dfrac{8a^3}{105},\ \ \ M_y = \dfrac{8a^3}{105},\ \ \ T = \dfrac{3a^2\pi}{32},\ \ \ x_S = y_S = \dfrac{256a}{315\pi}.$
(A $T$-re nézve lásd a **103**. feladatot.)

**224.** $M_x = \dfrac{a^3}{3},\ \ \ M_y = \dfrac{a^3}{3},\ \ \ T = \dfrac{a^2\pi}{4},\ \ \ x_S = \dfrac{4a}{3\pi},\ \ \ y_S = \dfrac{4a}{3\pi}.$

**225.** $M_x = \dfrac{a^3}{3}(\pi^3-6\pi),\ \ \ M_y = a^3(4-\pi^2),\ \ \ T = \dfrac{a^2\pi^3}{6},\ \ \ x_S = \dfrac{6a}{\pi^3}(4-\pi^2),$
$y_S = \dfrac{2a}{\pi^3}(\pi^3-6\pi).$

**226.** $M_x = \dfrac{32a^3}{3},\ \ \ M_y = 5a^3\pi,\ \ \ T = 3a^2\pi,\ \ \ x_S = \dfrac{5a}{3},\ \ \ y_S = \dfrac{32a}{9\pi}.$
(A $T$-re nézve l. a **120**. feladatot.)

**227.** $M_x = \dfrac{a^3}{30}\left(e^{3\pi}+1\right),\ \ \ M_y = -\dfrac{a^3}{10}\left(e^{2\pi}+1\right),\ \ \ T = \dfrac{a^2e^{2\pi}}{4},$
$x_S = -\dfrac{2a}{5e^{2\pi}}\left(e^{3\pi}+1\right),\ \ \ y_S = \dfrac{2a}{15e^{2\pi}}\left(e^{3\pi}+1\right).$
(A $T$-re nézve l. a **114**. feladatot.)

| | Téglalap-módszer | Trapéz-módszer | Parabola-módszer | | Téglalap-módszer | Trapéz-módszer | Parabola-módszer |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **217.** | 1,23239; | 1,22613; | 1,23530. | **218.** | 3,22023; | 3,28326; | 3,23961; |
| **219.** | 36,6024; | 34,7768; | 35,6757. | **220.** | 10,64646; | 10,52355; | 10,61165; |
| **221.** | 44,5073; | 44,2467; | 44,4089. | **222.** | 0,84459; | 0,82999; | 0,83682; |
| **223.** | 1,08884; | 1,19949; | 1,08943. | **224.** | 2,57979; | 2,60902; | 2,59083; |
| **225.** | 0,94830; | 0,94579; | 0,94802. | **226.** | 0,98560; | 0,98517; | 0,98546; |
| **227.** | 0,91608; | 0,91573; | 0,91597. | **228.** | 17,3843; | 17,2277; | 17,3222; |
| **229.** | 5,40258; | 5,40257; | 5,40258. | **230.** | 1,22939; | 1,22905; | 1,22927; |
| **231.** | 0,69266; | 0,69412; | 0,69315. | **232.** | 1,46746; | 1,46746; | 1,46746; |
| **233.** | 0,83587; | 0,83521; | 0,83565. | | | | |