1. fejezet

Bevezetés

Algebrai feladatok

J 1.1 *A számok gyakran használt halmazaira a következő jelöléseket vezetjük be:* $\mathbf{N}$ *a nemnegatív egész számok,* $\mathbf{N}^+$ *a pozitív egész számok,* $\mathbf{Z}$ *az egész számok,* $\mathbf{Q}$ *a racionális számok,* $\mathbf{R}$ *a valós számok és* $\mathbf{R}^+$ *a pozitív valós számok halmaza.*

J 1.2 *Az* $a_1+a_2+\cdots+a_n$ *összegre a* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *vagy a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ *jelölést használjuk (kiejtés: szumma* $k=1$*-től* n*-ig* a_k*).*

D 1.3 *Vezessük be az* $1\cdot 2\ldots n$ *szorzatra az* $n!$ *(kiejtés: n faktoriális) jelölést. Legyen továbbá* $0! = 1! = 1$.

D 1.4 *Legyenek* $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. *Az, hogy* a **osztója** b*-nek, azt jelenti, hogy van olyan* $c \in \mathbf{Z}$*, hogy* $ac = b$. *Jelölése:* $a|b$.

Feladatok

Legyen $a, b \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}^+$. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

1.$^\bullet$ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

2. $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + a^{2n-4}b^2 - \cdots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$,

3. $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$.

4.* Mutassuk meg, hogy ha $a+b+c=0$ $(a,b,c \in \mathbf{R})$, akkor $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

5. $|x| = x+1$, **6.** $|2x+3| = x^2$, **7.** $|\sin x| = \sin x + 2$,

8. $|\sin x| = \sin x + 3$, **9.** $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$, **10.** $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$,

11.$^\triangleright$ $|x^2+6x+6| = |x^2+4x+9| + |2x-3|$, **12.**$^\triangleright$ $|x^4-x^2-6| = |x^4-4| - |x^2+2|$,

13. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

14. $\dfrac{3x+5}{4x-7} < 0$, **15.** $\dfrac{2x+3}{x-3} \le 5$, **16.** $1 < \dfrac{3x-2}{4x+5} < 4$,

17. $\dfrac{5x-2}{|2x+1|} < 3$, **18.**• $|3x-7| < 1$, **19.**▷ $|x| < |x+6|$,

20. $|x+2| + |x-2| \le 12$, **21.** $|4x-3| < x < |4x+3|$,

22. $||x+1| - |x-1|| < 1$, **23.** $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$,

24. $\dfrac{2x+1}{x-4} < \dfrac{x+5}{x+1}$, **25.**▷ $\dfrac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} \le 2$,

26. $|2-x^2| > 3$, **27.** $|x(1-x)| < 0{,}05$,

28. $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$, **29.** $|x^2-5x| > |x^2| - |5x|$,

30.▷ $\sqrt{3-2x-x^2} > x+2$, **31.** $\sqrt{2-x} - \sqrt{x} > 1$.

Oldjuk meg valós x ismeretlenre az alábbi egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket:

32.▷ $4 < (2x+3)^2 < 9$, **33.** $(a-1)x > 2a, \quad ax < a+1$.

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az (x,y) pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira a következő egyenletek, illetve egyenlőtlenségek teljesüljenek:

34.▷ $|y| \le |x|$, **35.** $|y| < |x+2|$,

36.• $|x| + |y| \le 2$. **37.**• $|x| + |y| = 1$,

38. $|x| - |y| = 1$, **39.**• $|x+y| = |x| + |y|$,

40. $|x-y| = |x| - |y|$,

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket a valós számpárok halmazán:

41. $\begin{aligned} x-y-2 &< 0 \\ 3x-y-8 &> 0, \end{aligned}$ **42.** $\begin{aligned} 3x-y-2 &< 0 \\ 5x-4y+6 &< 0, \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} x-y-2 &< 0 \\ 3x-3y+10 &< 0, \end{aligned}$ **44.** $\begin{aligned} 4x+y-2 &= 0 \\ x-2y-14 &< 0, \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x-5y+7 &< 0 \\ x-y-1 &< 0 \\ x-2y+4 &> 0, \end{aligned}$ **46.** $\begin{aligned} 3x-7y+13 &= 0 \\ 2x+5y-1 &> 0 \\ 5x-2y-17 &< 0, \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} y^2-4x &< 0 \\ x^2+y^2-2x &\ge 0 \quad x \le 2, \end{aligned}$ **48.** $\begin{aligned} 25x^2+9y^2-225 &\le 0 \\ 9y^2-16x^2-144 &\ge 0. \end{aligned}$

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket. Ahol lehet, állapítsuk meg, hogy milyen feltételek mellett áll fenn az egyenlőség:

49.• $|x+y| \le |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbf{R})$ (**háromszög-egyenlőtlenség**, l. még **125.**),

50.▷ $a^2+b^2 \ge 2|ab| \quad (a, b \in \mathbf{R})$, **51.**▷ $|a-b| \ge ||a| - |b|| \quad (a, b \in \mathbf{R})$,

52. $\left|\dfrac{1}{a-b}\right| < \dfrac{2}{|a|}$, ha $|b| < \dfrac{|a|}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R})$,

53.• $a + \dfrac{1}{a} \ge 2 \quad (a \in \mathbf{R}^+)$, **54.** $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2 \quad (x \in \mathbf{R})$,

55. $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R}),$

56.$^\bullet$ $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R}^+)$ (a **harmonikus**, a **mértani** és a **számtani közép** közötti összefüggés; l. még a **128.** feladatot!)

57.* Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \geq 0$ és $\alpha > \beta > 0 \quad (a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R})$, akkor

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(a^\beta + b^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Az alábbi feladatokban értelmezzük a (nem üres) S halmazon a megadott $\star$ vagy $\circ$ műveleteket. Vizsgáljuk meg, hogy a halmaz zárt-e ezekre a műveletekre nézve, azaz a műveletek eredménye mindig benne van-e a halmazban? Ha igen, akkor a műveletek kommutatívak-e, asszociatívak-e? Ahol két műveletet is megadtunk, ott disztributív-e valamelyik művelet a másikra nézve?

58. $S = \mathbf{R}, \quad x \star y = y, \quad x, y \in \mathbf{R},$

59. $S = \mathbf{R}, \quad x \star y = \max(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R},$

60. S a páratlan számok halmaza, $\star$ a számok összeadása,

61. S a páros számok halmaza, $\star$ a számok összeadása,

62. S a páratlan számok halmaza, $\star$ a számok szorzása,

63.$^\triangleright$ $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = x + 2y, \quad x, y \in \mathbf{R},$

64.* $S = \mathbf{R}, \quad x \circ y = ax + by + c, \quad x, y \in \mathbf{R}$, ahol a, b, c adott valós számok,

65. $S = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, a $\star$ és a $\circ$ művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,

66. $S = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$, a $\star$ és a $\circ$ művelet a valós számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás,

67.* $S = \mathbf{R}, \quad a \star b = a + b - 1, \quad a \circ b = a + b - ab \quad (a, b \in \mathbf{R}).$

Számítsuk ki az alábbi összegeket:

68.$^\bullet$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (2k+1),$

69.$^\bullet$ $\displaystyle\sum_{k=-3}^{1} k^3,$

70. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (2k+1),$

71.$^\bullet$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k,$

72. $\displaystyle\sum_{k=7}^{20} \pi,$

73.$^\triangleright$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k \sin\frac{k\pi}{2}.$

Írjuk fel a szumma jel alkalmazásával a következő összegeket:

74.$^\bullet$ $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4,$

75.$^\bullet$ $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5},$

76. $15 + 24 + 35 + \cdots + (n^2 - 1),$

77. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$

78.$^\bullet$ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$

79. $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + a b^4 - b^5.$

Melyek igazak az alábbi összefüggések közül minden $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ és c valós számra?

80.$^\bullet$ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$,

81.$^\bullet$ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$,

82. $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$,

83.$^\bullet$ $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$.

84. Írjuk fel az x-ben másodfokú $\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$ függvény diszkriminánsát, ahol $a_k,b_k\in\mathbf{R}$.

85.$^\triangleright$ (**Cauchy-Bunyakovszkij** egyenlőtlenség) Az előző feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget, ahol $a_k,b_k\in\mathbf{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

86. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a és b valós számra:

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ge(a^3+b^3)^2.$$

87. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a,b és x valós számra:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos x+b\sin x\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

Számítsuk ki a következő összegeket:

88. $\sum_{k=0}^{0}(-3)$,

89. $\sum_{k=m}^{n}c \quad (n\ge m); c$ konstans,

90. $\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$,

91. $\sum_{k=2}^{20}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k-1)^2}\right)$,

92.$^\bullet$ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$,

93. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, $\left(\text{Útmutatás :}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$,

94.* $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ (Útmutatás: szorozzunk $2\sin\frac{x}{2}$-vel),

95. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$, ahol $a_{kl}=0$, ha $k\ne l$ és $a_{kl}=1$, ha $k=l$,

96. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$, ha $a_{kl}=k$,

97. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}$, ha $a_{kl}=k-l$.

Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

98. $\frac{10!}{8!}+\frac{10!}{3!7!}-\frac{1!}{0!}$,

99. $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} \quad (n\ge 2)$,

100.$^\bullet$ $\frac{n!(2n+1)!}{(n-1)!(2n+3)!} \quad (n\in\mathbf{N}^+)$,

101. $\frac{(n-k)!(2n+1)!}{n!(n+k)!} \quad (n,k\in\mathbf{N}; k\le n)$.

102.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy ha $k|m$ és $k|(m+n)$, ahol $k,m,n\in\mathbf{Z}$ és $k\ne 0$, akkor $k|n$. Igaz-e az állítás megfordítása?

Teljes indukció

D 1.5 *A* **teljes indukció** *a direkt bizonyítás egyik fontos típusa. Jelöljön $A(n)$ olyan állítást, amely az n egész számtól függ. A bizonyítás két lépésből áll. Először megmutatjuk, hogy van olyan n_0 egész szám, hogy az $A(n_0)$ állítás igaz. Azután feltesszük, hogy valamely n egész számra $A(n)$ igaz, s ennek alapján bebizonyítjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz. Ezekből már következik, hogy $A(n)$ igaz minden $n \geq n_0$ esetben.*

Feladatok

Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy a következő állítások igazak, ha az n pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely n_0 pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen n_0-t):

103. $^\bullet$ $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

104. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$,

105. $^\bullet$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

106. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$,

107. $^\triangleright$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k^2 = 1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$,

108. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)k^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$,

109. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$,

110. $\displaystyle\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$,

111. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

112. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+t-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+t)}{t+1}, \quad t \in \mathbf{N}^+$,

113. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

114. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)!-1$,

115. $^\bullet$ $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

116. $^\triangleright$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$,

117. $^\triangleright$ $\displaystyle\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$,

118.▷ $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$, **119.**▷ $3^n > 2^n + 7n$,

120. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$,

121.⋆ $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (a bal oldalon n darab gyökjel van),

122.⋆ $3 + 33 + \cdots + 33\ldots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$ (a bal oldalon n tagú összeg van).

123.▷ Egy síkbeli tartományt n darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott "térkép" két színnel színezhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek (l. bal oldali ábra).

124.⋆ Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út, és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk át a kereszteződésen. (Útmutatás: Használhatjuk az előző feladat eredményét és a jobb oldali ábrát.)

125.• Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, akkor

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok között nincsenek különböző előjelüek. (l. a **49.** feladatot!)

126.⋆ Mutassuk meg, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ és $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, akkor $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

127. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$, akkor $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

128.▷ Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

azaz pozitív számok mértani közepe nem nagyobb a számtani közepüknél, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

129. Igazoljuk, hogy $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^+$ esetén $nx_1x_2\dots x_n \le x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$.

130. Bizonyítsuk be az $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n \ge 2)$ egyenlőtlenséget.

Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat ($n \in \mathbf{N}^+$):

131.$^{\triangleright}$ $8|5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, **132.**$^{\triangleright}$ $6|n(2n^2 - 3n + 1)$, **133.**$^{\triangleright}$ $133|11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

134.* Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész szám sorrendtől eltekintve egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára (**a számelmélet alaptétele**).

Keressük meg a hibát a következő bizonyításokban:

135. Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n egész számra, azaz $n = n + 1$. Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy $n+1 = n+2$, tehát a tulajdonság öröklődik.

136.* Bebizonyítjuk, hogy a sík minden pontja egy egyenesen van. Ehhez megmutatjuk, hogy véges sok pont a síkon mindig egy egyenesen van. Az állítás $n = 2$ esetén igaz, hiszen bármely két pont egy egyenesen van. Tegyük fel, hogy bármely n pont egy egyenesen van. Bizonyítjuk, hogy akkor bármely $n+1$ pont is egy egyenesen van. Ha ugyanis nem volna, az azt jelentené, hogy van a síkon n olyan pont, amelyek egy egyenesen vannak, és egy $(n+1)$-edik pont, amely nincs ezen az egyenesen. Ekkor elhagyva az egy egyenesen lévő n pont valamelyikét, ezzel a ponttal olyan n pontot kapnánk, amelyek már nincsenek egy egyenesen, ez pedig ellentmond az indukciós feltevésnek.