1. Bevezetés (megoldások)

1. A szorzás elvégzésével adódik az állítás.

4. $0 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$. Ebből: $3abc = a^3+b^3+c^3+3ab(a+b+c)+3ac(a+b+c)+3bc(a+b+c) = a^3+b^3+c^3$.

5. Ha $x \geq 0$, akkor $x = x+1$, ami lehetetlen. Ha $x < 0$, akkor $-x = x+1$, azaz $x = -\frac{1}{2}$.

6. $x_1 = -1; x_2 = 3$.

7. $x = \frac{3k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$.

8. Nincs megoldás.

9. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$.

10. $|a| = a$ pontosan akkor, ha $a \geq 0$, ezért az $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. A megoldások: $x \geq 0, \quad x < -1$.

11. Az egyenlet átírható a bal oldal átalakításával a következőképpen:

$$|(x^2+4x+9)+(2x-3)| = |x^2+4x+9| + |2x-3|.$$

Tetszőleges a, b valós számokra $|a+b| = |a|+|b|$ akkor és csak akkor, ha a és b egyenlő előjelűek. Mivel $x^2+4x+9 = (x+2)^2+5 > 0$, ezért szükségképpen $2x-3 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{3}{2}$.

12. $|a-b| = |a|-|b|$ pontosan akkor, ha $|a| \geq |b|$ és b előjele megegyezik a előjelével. Ezért: $x^4-4 \geq x^2+2$, amiből kapjuk, hogy : $x^2-2 \geq 1$, azaz $|x| \geq \sqrt{3}$.

13. Az egyenletnek csak pozitív x-ekre van értelme a valós számok körében. Az $x = 1$ megoldása az egyenletnek. Ha $x \neq 1$, akkor az egyenletből $2\sqrt{x} = x$, amiből $x = 4$ következik.

14. $-\frac{5}{3} < x < \frac{7}{4}$.

15. $x < 3, \quad x \geq 6$.

16. Nincs megoldás.

17. $x \neq -\frac{1}{2}$.

18. $|3x-7| < 1$ pontosan akkor, ha $-1 < 3x-7 < 1$, azaz ha $2 < x < \frac{8}{3}$.

19. Ha $x \leq -6$, akkor $-x \leq -x-6$, ami lehetetlen. Ha $-6 < x \leq 0$, akkor $-x \leq x+6$, azaz $-3 \leq x$. Ha $0 < x$, akkor $x \leq x+6$, ami minden ilyen számra igaz. Tehát minden $x \geq -3$ szám megoldása az egyenlőtlenségnek.

20. $-6 \leq x \leq 6$.

21. $\frac{3}{5} < x < 1$.

22. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

23. $-1 < x < 0$.

24. $\dfrac{x^2+2x+21}{(x-4)(x+1)} < 0; x^2+2x+21 > 0$, ezért $(x-4)(x+1) < 0$, ahonnan $-1 < x < 4$.

25. $x^2+2x-3 > 0$, ha $x < -3$ vagy $x > 1$. Ekkor a feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens az $x^2+3x-10 \leq 0$ egyenlőtlenséggel. Mivel az $x^2+3x-10$ kifejezés zérushelyei -5 és 2, ezért ez akkor igaz, ha $-5 \leq x \leq 2$. Ebben az esetben tehát a megoldások: $-5 \leq x \leq -3, \quad 1 < x \leq 2$. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy ha $-3 < x < 1$, akkor nincs megoldás.

26. $x < -\sqrt{5}$, $\quad x > \sqrt{5}$.

27. $0 \le x < \frac{5-2\sqrt{5}}{10}$, $\quad \frac{5+2\sqrt{5}}{10} < x \le 1$.

28. $3 < x < 4$.

29. $x < 0$, $\quad 0 < x < 5$.

30. $3 - 2x - x^2 \ge 0$ pontosan akkor, ha $-3 \le x \le 1$. Ha $x \le -2$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldala nem pozitív, tehát az egyenlőtlenség a $-3 \le x \le -2$ intervallumban teljesül. Ha $x > -2$, akkor a jobb oldal pozitív. Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy $2x^2 + 6x + 1 \le 0$. Az utóbbi egyenlőtlenség megoldásai: $\frac{-3-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$. Az $x > -2$ feltételt figyelembe véve $-2 < x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$. Az eredményeket összesítve, a megoldások: $-3 \le x < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$.

31. $0 \le x < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

32. Az egyenlőtlenségrendszer ekvivalens a $2 < |2x+3| < 3$ egyenlőtlenségrendszerrel. Ha $x \ge -\frac{3}{2}$, akkor $2 < 2x + 3 < 3$, azaz $-\frac{1}{2} < x < 0$. Ha $x < -\frac{3}{2}$, akkor $2 < -2x - 3 < 3$, amiből $-\frac{5}{2} > x > -3$.

33. Ha $a < 0$, akkor $\frac{a+1}{a} < x < \frac{2a}{a-1}$. Ha $a = 0$, akkor $x < 0$. Ha $0 < a < 1$, akkor $x < \frac{2a}{a-1}$. Ha $a \ge 1$, akkor nincs megoldás.

34. Ha $x, y \ge 0$, akkor $y \le x$, azaz az első síknegyedben az x tengely és az $y = x$ egyenletű egyenes közötti szögtartomány. Ha $x \le 0$, $\quad y \ge 0$, akkor $y \le -x$, azaz a második síknegyedben az x tengely és az $y = -x$ egyenletű egyenes közötti szögtartomány. A harmadik és a negyedik síknegyed pontjaira is megvizsgálva az egyenlőtlenséget, megoldásként az ábrán látható halmazt kapjuk.

35. Az alábbi bal oldali ábrán látható a megoldás. Az $y = x + 2$ és az $y = -x - 2$ egyenletű egyenesek pontjai nem tartoznak a megoldáshalmazhoz.

36. A jobb oldali ábrán látható a megoldás.

37. A $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ pontokat összekötő négyzet határvonala.

38. Az első síknegyedben az $y = x - 1$, a második síknegyedben az $y = -x - 1$, a harmadik síknegyedben az $y = x + 1$, a negyedik síknegyedben az $y = -x + 1$ egyenletű egyenes.

39. Nem lehet x és y különböző előjelű, így a halmazba a sík első és harmadik negyedének pontjai és a koordináta-tengelyek pontjai tartoznak.

40. Az x-tengely és az $y = x$ egyenletű egyenes közötti 45^o-os szögtartomány pontjai a határoló egyenesekkel.

41. Az egyenlőtlenségeket y-ra megoldva: $y > x - 2, \quad y < 3x - 8$, azaz $x - 2 < y < 3x - 8$. A bevonalazott szögtartomány belső pontjainak koordinátái a egyenlőtlenségrendszer megoldásai. (bal oldali ábra)

42. $y > 3x - 2, \quad y > \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$. Mivel $3x - 2 \geq \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, ha $x \geq 2$ és $3x - 2 < \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, ha $x < 2$, ezért az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $y > 3x - 2$, ha $x \geq 2$; $y > \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, ha $x < 2$. (jobb oldali ábra)

43. $y > x + \frac{10}{3}$.

44. Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenesnek az $\frac{x}{2} - 7 < y$ félsíkba eső része.

45. $\frac{x+7}{5} < y < \frac{x+4}{2}$, ha $-2 < x \leq 3$ és $x - 1 < y < \frac{x+4}{2}$, ha $3 \leq x < 6$, azaz az $y = \frac{x+7}{5}$, az $y = \frac{x+4}{2}$ és az $y = x - 1$ egyenletű egyenesek által meghatározott háromszög belső pontjai adják a megoldáshalmazt.

46. $y = \frac{3}{7}x + \frac{13}{7}$, ahol $-2 < x < 5$.

1.3

47. Az $y^2 - 4x < 0$ egyenlőtlenséget az $y^2 = 4x$ egyenletű parabola belső pontjainak koordinátái elégítik ki, az $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ egyenlőtlenséget pedig az $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ körlap pontjainak koordinátái. Az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát a bal oldali ábra bevonalazott része mutatja (a szaggatott vonal pontjai nem tartoznak a halmazhoz).

48. Az első egyenlőtlenséget kielégitő pontok halmaza az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ellipszis belső és határpontjainak halmaza. A második egyenlőtlenséget pedig az $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ hiperbola határ- és külső pontjainak koordinátái elégítik ki. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása a fenti jobb oldali ábrán látható.

49. 1.megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x \geq y \geq 0$ vagy $x > 0 > y$ vagy $0 \geq x \geq y$. Ha $x \geq y \geq 0$, akkor $|x|+|y| = x+y = |x+y|$. Ha $x > 0 > y$, akkor $|x| + |y| = x - y > -y = |y| > |x + y|$. Ha $0 \geq x \geq y$, akkor $|x| + |y| = -x - y = -(x + y) = |x + y|$. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha x és y előjele megegyezik.

2.megoldás: Felhasználjuk, hogy nem negatív a és b számokra $a \leq b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a^2 \leq b^2$. Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát. Azonos átalakítások után az $xy \leq |x||y|$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely nyilvánvalóan igaz. Ebből az is leolvasható, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x és y előjele megegyezik.

50. Ha $ab \geq 0$, akkor $a^2 + b^2 - 2|ab| = (a - b)^2 \geq 0$. Ha $ab < 0$, akkor $a^2 + b^2 - 2|ab| = (a + b)^2 \geq 0$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $|a| = |b|$.

51. Az $|x+y| \leq |x|+|y|$ felhasználásával kapjuk, hogy $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$ és $|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a| = |a-b|+|a|$, amelyekből: $|a-b| \geq |a|-|b|$ és $|a - b| \geq |b| - |a|$, azaz $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

52. Felhasználva az előző feladatot is:
$$\frac{1}{|a-b|} \leq \frac{1}{||a|-|b||} = \frac{1}{|a|-|b|} < \frac{1}{|a| - \frac{|a|}{2}} = \frac{2}{|a|}.$$

53. $a + \frac{1}{a} \geq 2$ pontosan akkor, ha $a^2 + 1 \geq 2a$, azaz ha $(a-1)^2 \geq 0$. Az utolsó egyenlőtlenségből látható, hogy az egyenlőség csak az $a = 1$ esetben teljesül.

54. Az előző feladat és az $\dfrac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ átalakítás alapján adódik az állítás. Az egyenlőség csak az $x = 0$ esetben érvényes.

55. Az **53.** feladat alapján. Az egyenlőség csak az $x = \pm 1$ esetekben teljesül.

56. A $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ és a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ egyenlőtlenségeket külön-külön vizsgálva, mindkét oldal négyzetreemelésével adódik az állítás.Az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha $a = b$.

57. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor nyilvávalóan igaz az állítás. Legyen $a > 0$ és $b > 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a \geq b$. Ez azt jelenti, hogy $0 < \frac{a}{b} \leq 1$. Mivel $\alpha > \beta$, ezért $0 < \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha < \left(\frac{a}{b}\right)^\beta$. Mivel $0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$, ezért: $\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{b^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{a^\beta+b^\beta}{b^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, amiből $b > 0$ miatt adódik az állítás. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = 0$ vagy $b = 0$.

58. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet asszociatív, de nem kommutatív.

59. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet asszociatív és kommutatív.

60. A halmaz nem zárt a műveletre nézve.

61. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet az egész számok halmazán kommutatív és asszociatív, ezért bármely részhalmazán is, így a páros számok halmazán is az.

62. A halmaz zárt a műveletre nézve. A művelet kommutatív és asszociatív.

63. A halmaz zárt a műveletre nézve. $x \circ y = x + 2y$, $\quad y \circ x = y + 2x$, $\quad (x \circ y) \circ z = (x+2y) \circ z = x + 2y + 2z$ és $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + 2z) = x + 2(y+2z) = x + 2y + 4z \quad (x, y, z \in \mathbf{R})$, ezért a művelet nem kommutatív és nem asszociatív.

64. A halmaz zárt a műveletre nézve. Ha $c \neq 0$, akkor az $a = b = 1$ esetben, ha pedig $c = 0$, akkor az $a, b \in \{0, 1\}$ esetekben a művelet kommutatív és asszociatív, minden más esetben nem kommutatív és nem asszociatív.

65. A halmaz zárt a műveletekre nézve. Mindkét művelet asszociatív, kommutatív és a szorzás az összeadásra nézve disztributív. Az összeadás a szorzásra nézve nem disztributív.

66. A halmaz zárt az összeadásra, de nem zárt a szorzásra nézve. Az összeadás kommutatív és asszociatív.

67. A halmaz zárt a műveletekre nézve. Mindkét művelet asszociatív, kommutatív és a $\circ$ művelet a $\star$ műveletre nézve disztributív. A $\star$ művelet a $\circ$ műveletre nézve nem disztributív.

68. $\sum_{k=0}^{5}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$.

69. $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -35$.

70. -6. **71.** 0 **72.** 14π

73. $\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\pi + 3\sin\frac{3\pi}{2} + 4\sin 2\pi = -2$

74. $\sum_{k=0}^{4} 2^k$. **75.** $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k \frac{1}{k}$. **76.** $\sum_{k+4}^{n}(k^2-1)$.

77. $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. **78.** $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$. **79.** $\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a^{5-k} b^k$.

80. Az összeadás kommutativitása és asszociativitása miatt igaz.

81. Igaz. **82.** Nem igaz. **83.** Igaz.

84. $4\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\right)$.

85. Tekintsük az előző feladatbeli másodfokú függvényt. Egy másodfokú függvény akkor és csak akkor nagyobb vagy egyenlő 0-nál minden x-re, ha a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem pozitív, amiből már adódik az egyenlőtlenség. Ebből az is látható, hogy $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$ esetben egyenlőség pontosan akkor van, ha létezik olyan $x_0 \in \mathbf{R}$, hogy minden k-ra $a_k x_0 + b_k = 0$. Az egyenlőség akkor is igaz, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

86. A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből következik.

87. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget.

88. -3. **89.** $(n-m+1)c$. **90.** $1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$.

91. $-\frac{399}{400}$. **92.** $a_1 - a_{n+1}$. **93.** $1 - \frac{1}{n+1}$.

94. Felhasználva a $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$ azonosságot, ha $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$, akkor $S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n \left(\cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x\right) = \cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x$, Ebből, ha $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, akkor $S_n(x) = \dfrac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$. Ha $\sin \frac{x}{2} = 0$, akkor $S_n(x) = 0$.

95. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = n$.

96. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1} nk = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

97. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \sum_{k=1}^n \left(nk - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = 0$.

98. $9 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = 209$. **99.** $(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

100. $\dfrac{n}{(2n+2)(2n+3)}$. **101.** $\dfrac{(n+k+1)(n+k+2)\ldots(2n+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}$.

102. Ha $k|m$ és $k|(m+n)$, akkor van olyan $r, t \in \mathbf{Z}$, hogy $m = rk$ és $m + n = tk$, ezért $n = (t-r)k$. Mivel $t - r \in \mathbf{Z}$, így $k|n$. Hasonlóan látható be az állítás megfordítása is.

103. $n = 1$ esetben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az n pozitív egész számra igaz az állítás, azaz $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ebből bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz $1 + n + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden n pozitív egész számra igaz az állítás, azaz $n_0 = 1$.

104. Az állítás az $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ azonosság alapján igazolható, $n_0 = 1$.

107. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz az állítás. Ekkor $(n+1)$-re:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 + (-1)^n (n+1)^2$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2 = -(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (-1)^n \frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

115. $n = 1$ esetben a két oldal egyenlő, $n = 2$ esetben érvényes az egyenlőtlenség: $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ pontosan akkor, ha $3\sqrt{7} < 8$, azaz ha $63 < 64$, ami igaz. Tegyük fel, hogy n-re érvényes az egyenlőtlenség. Ekkor beszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{2n+1}{2n+2}$-vel, kapjuk hogy

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2};$$

Az $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ egyenlőtlenség mindkét oldal négyzetreemelésével igazolható, ez pedig bizonyítja az állítás helyességét $(n+1)$-re.

116. $n = 2$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz. Ekkor:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$$

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} >$$

$$\frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}.$$

117. $n = 2$-re igaz az állítás: $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$, mivel $2 < \sqrt{2} + 1 < 4$. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor: $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$.

118. $n = 2$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n-re is igaz. Akkor $(n+1)$-re:

$$\frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} <$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} <$$

$$n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} <$$

$$n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = n + 2^n\frac{1}{2^n} = n + 1.$$

119. $n_0 = 4$. A $3^n > 2^n + 7n$ indukciós feltevés alapján: $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(2^n + 7n)$. Ebből a $3 \cdot 2^n + 3 \cdot 7n = (2+1)2^n + (2+1)7n = 2^{n+1} + 7n + 2^n + 2 \cdot 7n > 2^{n+1} + 7n + 7 = 2^{n+1} + 7(n+1)$ alapján adódik az állítás.

120. Teljes indukcióval, felhasználva, hogy

$$\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2(2n+1)}{n+1} < 4^{n-1}4 = 4^n,$$

azt kapjuk, hogy $n > 1$ esetén az állítás igaz.

121. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Akkor ebből $(n+1)$-re:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2+2\cos 2\frac{\pi}{2^{n+2}}} =$$

$$\sqrt{2+2(2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}-1)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

122. $\frac{10^{n+2}-9(n+1)-10}{27} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27} + \frac{10^{n+1}-1}{3}$ segítségével teljes indukcióval bizonyítható az állítás, felhasználva, hogy $\frac{10^{n+1}-1}{3} = 33\ldots 3$, ahol a jobb oldalon $n+1$ darab 3-as szerepel. (Ez szintén bizonyítható teljes indukcióval.)

123. Az egyenesek számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz. Tekintsünk egy $n+1$ egyenessel származtatott térképet. Hagyjuk el az egyik egyenest. A maradék n egyenessel származtatott térkép az indukciós feltevés szerint színezhető két színnel. Húzzuk vissza az $(n+1)$-edik egyenest, majd ennek egyik oldalán változtassuk meg minden rész szinét a másikra. Így nyilván jó színezést kapunk.

124. Tekintsük az egyenes utakat tartalmazó térképet, és az utakkal felszabdalt tartományt színezzük két színnel, például fehérrel és feketével, az előző feladat szerint. Ezek után minden útkereszteződést úgy építsünk meg, hogy ha az úton haladva jobb kézre fehér tartomány esik, akkor az útkereszteződésbe érve ez az út essen felülre (lásd a feladat mellett közölt ábrát). Könnyen látható, hogy akkor minden útkereszteződésben egyértelműen definiálva van az, hogy melyik út megy felül és melyik alul, valamint az, hogy minden úton felváltva vannak alul- ill. felüljárók.

125. Az egyenlőtlenség teljes indukcióval egyszerűen megmutatható. $n = 1$-re nyilvánvalóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy ha $1 \le k \le n$, akkor $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$; ezért $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \le |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$. Az egyenlőséget $n = 2$ esetben a **49.** feladatban már megvizsgáltuk. A bizonyítás szintén teljes indukcióval fejezhető be. Tegyük fel, hogy minden $2 \le k \le n$ esetben $|a_1+a_2+\cdots+a_k| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|$ akkor és csak akkor, ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egyenlő előjelűek. Ebből következik, hogy $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| = |a_1 + a_2+\cdots+a_n|+|a_{n+1}|$ akkor és csak akkor, ha $a_1+a_2+\cdots+a_n$ és a_{n+1} egyenlő előjelűek, továbbá $|a_1+a_2+\cdots+a_n|+|a_{n+1}| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+|a_{n+1}|$, akkor és csak akkor, ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egyenlő előjelűek. Ebben az esetben viszont előjelük egyenlő $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ előjelével, azaz a_{n+1} előjelével.

126. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 2$ esetre a **49.** feladat szerint igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az llítás igaz valamely n-re, és legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbf{R}^+$ valós számokra $x_1x_2 \ldots x_nx_{n+1} = 1$. Ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} (= 1)$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$ között találhatók különböző számok, akkor van közöttük 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x_1 < 1$ és $x_{n+1} > 1$. Így az indukciós feltevést is felhasználva: $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1} = (x_1x_{n+1} + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1} - x_1x_{n+1} + x_1 \geq n + x_{n+1} - x_1x_{n+1} + x_1 = n + 1 + x_{n+1} - x_1x_{n+1} + x_1 - 1 = n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) > n + 1$.

127. Az előző feladat alapján adódik az állítás.

128. Legyen $\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n} = a$, akkor $1 = \frac{x_1}{a}\frac{x_2}{a} \ldots \frac{x_n}{a}$. A **126.** feladat szerint $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \cdots + \frac{x_n}{a} \geq n$, amiből már megkapjuk az állítást.

129. Az előző feladat alapján.

130. Az **1.128** feladat alapján.

131. $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re $8|5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Ekkor $(n+1)$-re: $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 3^{n-1} + 1 = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 + 4(5^n + 3^{n-1})$. Mivel $5^n + 3^{n-1}$ páros szám, ezért $8|4(5^n + 3^{n-1})$. Az indukciós feltevést is felhasználva adódik az állítás.

132. Használjuk az $(n+1)(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) = (n+1)(2n^2 + n) = n(2n^2 - 3n + 1) + 6n^2$ átalakítást.

133. $11^{n+2}+12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1}+144 \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1}+12^{2n-1})+133 \cdot 12^{2n-1}$

134. $n = 2$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy minden $2 \leq k \leq n$ esetén igaz az állítás. Ha $n + 1$ prímszám, akkor $(n + 1)$-re is igaz az állítás. Ha $n + 1$ összetett szám, akkor van olyan $p \leq n$ primszám, hogy $pj = n + 1 \quad (j \in \mathbf{N}^+, j > 1)$. Az indukciós feltevést alkalmazzuk a bizonyítás befejezéséhez.

135. Nem ellenőriztük, hogy van-e olyan n_0 érték, amelyre az állítás igaz.

136. A tulajdonság öröklődésének bizonyítása korrekt minden $n > 2$ egészre, de éppen $n = 2$ esetén, azaz 2-ről 3-ra nem igaz. Elhagyva ugyanis bármely 2 pont valamelyikét, és a maradék ponthoz hozzávéve egy további pontot, ez a 2 pont is meghatároz egy egyenest, vagyis ez esetben nem jutunk ellentmondásra.