3. fejezet

Matematikai logika

Logikai műveletek, kvantorok

D 3.1 *A P és Q elemi ítéletekre vonatkozó logikai alapműveleteket (***konjunkció** *($\wedge$),* **diszjunkció** *($\vee$),* **implikáció** *($\Rightarrow$),* **ekvivalencia** *($\Leftrightarrow$),* **negáció** *($\neg$)) táblázatos definíciói:*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	P	$\neg P$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0		
0	0	0	0	1	1		

D 3.2 *Két logikai kifejezést akkor és csak akkor tekintünk* **azonosan egyenlőnek***, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele $\equiv$.*

J 3.3 *A $\forall x P(x)$ és a $\exists x P(x)$ jelölések kiejtése: „minden x-re (igaz, hogy) $P(x)$" és „van olyan x, hogy $P(x)$". A $\forall$ ill. a $\exists$ jel neve* **univerzális** *ill.* **egzisztenciális kvantor**.

T 3.4 *Azonosságok:*

(1)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	asszociativitás
(2)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	kommutativitás
(3)	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$	idempotencia
(4)	$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	elnyelés
(5)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	disztributivitás
(6)	$P \wedge 1 \equiv P \qquad P \wedge 0 \equiv 0$	$P \vee 1 \equiv 1 \qquad P \vee 0 \equiv P$	
(7)	$P \wedge \neg P \equiv 0$	$P \vee \neg P \equiv 1$	$\neg(\neg P) \equiv P$
(8)	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	De Morgan-azonosságok
(9)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$	
(10)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$		kontrapozíció
(11)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
(12)	$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$	$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$	kvantoros ítéletek tagadása

P 3.5 *Bebizonyítjuk a $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ azonosságot (***T 3.4** *(8)) a* **D 3.1** *segítségével. A táblázat kitöltésének lépéseit itt külön táblázatokban adjuk meg: 1) az értékpárok* *beírása, 2) a $\neg P$ értékének kiszámítása, 3) mindkét oldal kiszámítása.*

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1		1			1		1
1		0			1		0
0		1			0		1
0		0			0		0

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1		1		**0**	1		1
1		0		**0**	1		0
0		1		**1**	0		1
0		0		**1**	0		0

P	$\Rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	**1**	1		0	1	**1**	1
1	**0**	0		0	1	**0**	0
0	**1**	1		1	0	**1**	1
0	**1**	0		1	0	**1**	0

Feladatok

Az alábbi feladatokban P igaz, Q hamis, R hamis és S igaz logikai értékű ítéletet jelöl. Határozzuk meg a következő összetett ítéletek logikai értékét:

1.▷ $(P \wedge Q) \wedge R$, **2.** $(P \wedge Q) \vee R$, **3.** $(P \vee Q) \vee R$,

4. $(Q \wedge P) \vee S$, **5.** $Q \wedge (P \vee S)$, **6.** $R \Rightarrow (Q \vee \neg P)$,

7. $P \Rightarrow (P \Rightarrow S)$, **8.** $P \Rightarrow (R \vee S)$,

9. $(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee S)$, **10.** $(R \wedge \neg S) \Leftrightarrow (Q \vee S)$,

11.▷ $S \Leftrightarrow (P \Rightarrow (\neg P \vee S))$, **12.** $(Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (R \vee \neg S))$.

13.• Az implikáció „Ha P, akkor Q” ($P \Rightarrow Q$) ítéletét írjuk le több módon, például az alábbi kifejezések felhasználásával: „implikálja”, „maga után vonja”, „szükséges feltétele”, „elégséges feltétele”, „csak akkor”, … .

14. Ha egy n számú logikai változót tartalmazó kifejezés logikai értékét meg akarjuk határozni a változók minden lehetséges értéke mellett, akkor hány esetet kell megvizsgálni? Más szóval: a **P 3.5** példa szerint elkészített táblázatnak a vízszintes vonal alatt hány sora van, ha a logikai változók száma n?

15.▷ A p, q és r logikai változókból képezzük a következő két logikai kifejezést: $p \wedge (q \vee r)$ és $(p \wedge q) \vee r$. Azonosan egyenlők-e ezek a kifejezések?

Igazoljuk a következő azonosságokat táblázattal és/vagy a **T 3.4** tételbeli azonosságok felhasználásával:

16.• $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, (implikáció tagadása, **T 3.4** (8)),

17.▷ $p \wedge q$, **18.** $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$,

19.▷ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, **20.** $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$,

21. $(p \vee q) \equiv \neg p \Rightarrow q$, **22.** $\neg(p \wedge q) \equiv p \Rightarrow \neg q$,

23. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$, **24.** $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv 1$,

25. $[\neg p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p \equiv 1$, **26.** $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$,

27. $\neg\,[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,

28. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \equiv [\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$,

29.▷ $(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow s \equiv p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)]$,

30. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

31. $\neg\,(((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Állítsuk elő az alábbi ítéleteket a logikai műveletek és tovább már nem bontható elemi ítéletek segítségével, majd ahol lehet, azonosságok alkalmazásával hozzuk egyszerűbb alakra:

32. „Márta nem szőke."

33. „Nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz."

34.▹ „Esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár."

35. „Éva vagy Pista ott volt."

36. „Ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez."

37. „Elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj."

38. „Kizárt, hogy se matekból, se fizikából ne menjek át elsőre."

39. „Ha a szemtanú megbízható, és az ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor téved az írásszakértő."

40. „Szivárvány csak akkor van, ha esik az eső, a Nap is süt, de nincs dél."

A dőlt betűs mondatok mindegyike tekinthető két elemi ítélet logikai függvényének. Írjuk fel e függvények logikai értékeit táblázat segítségével! (Vigyázzunk, a 'vagy' szót a hétköznapi beszédben többféle értelemben is használjuk.)

41. *Az n egész szám vagy páros, vagy páratlan.*

42. – Megyünk ma kirándulni és strandolni?
– *Vagy kirándulni megyünk, vagy strandolni.*

43. – Melyik állomás következik?
– *Vagy Ecser, vagy Maglód.*

A következő feladatokban $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $H(x)$ jelentse a következő, x-től függő, $S(x, y)$ pedig az x, y változóktól függő ítéleteket, ahol x és y pozitív egész számok:

$T(x)$: x prímszám; $P(x)$: x páros szám; $S(x, y)$: x osztója y-nak.

Mi az alábbi ítéletek logikai értéke:

44. $T(7)$, **45.** $T(2) \wedge P(2)$, **46.** $\exists x T(x)$,

47. $\forall y \, \exists x \, S(x, y)$, **48.** $\exists x T(x) \wedge P(x))$, **49.** $\forall x T(x)$,

50. $\forall y (S(2, y)) \Rightarrow P(y))$, **51.** $\exists x \, \exists y \, (S(x, y) \Rightarrow y < x)$,

52. $\forall x \forall y (S(x, y) \Rightarrow x \leq y)$, **53.**• $\exists x \, (S(6, x) \Rightarrow T(x))$.

Jelöljön x egy tetszőleges négyszöget. Tekintsük a következő ítéleteket:
$p(x)$: az x négyszög húrnégyszög;
$q(x)$: az x négyszög téglalap;
$r(x)$: az x négyszög szemközti szögeinek összege 180°;
$s(x)$: az x négyszög átlói felezik egymást.
Fogalmazzuk meg a következő összetett ítéleteket, majd határozzuk meg azok logikai értékét:

54. $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$, **55.** $\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$, **56.** $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$,

57. $\forall x[p(x) \Leftrightarrow r(x)]$, **58.** $\forall x[q(x) \Rightarrow s(x)]$, **59.** $\forall x[\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)]$,

60. $\forall x[(p(x) \wedge \neg q(x)) \Rightarrow s(x)]$.

Írjuk fel logikai műveletek és kvantorok segítségével az alábbi ítéleteket, majd fogalmazzuk meg mindegyik tagadását a **T 3.4** (12) azonosság felhasználásával:

61.▷ „Minden ajtón van kilincs."

62.▷ „Nem mind molnár, ki szekercét fog hóna alá." (közmondás)

63. „Ki nem szólt, csak bégetett,/ az kapott dicséretet." (Weöres Sándor)

64.• „Minden pozitív ε számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy bármely x valós számra, ha $|x-a|<\delta$, akkor $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$."

65. „Mindig fázom, ha fúj a szél."

Logikai műveletek kapcsolata a halmazműveletekkel

M 3.6 *Halmazokhoz természetes módon hozzárendelhetünk logikai ítéleteket. Legyen H az alaphalmaz, és legyen abban P egy halmaz. Valamely $x \in H$ elemre $p(x)$ logikai értéke legyen igaz, ha $x \in P$, és hamis, ha $x \notin P$, azaz $p(x)$ legyen maga az $x \in P$ ítélet.*
A $\neg p(x)$ **negáció** *halmazelméleti megfelelője a P halmaz H-ra vonatkozó komplementere. Definíció szerint a $p(x)$ és $q(x)$ logikai értékekre a $p(x) \wedge q(x)$* **konjunkció** *akkor és csak akkor igaz, ha $p(x)$ igaz, és $q(x)$ is igaz. Ugyanakkor, valamely x dologra $x \in P \cap Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in P$ és $x \in Q$. Ezek alapján mondhatjuk, hogy a $p(x) \wedge q(x)$ konjunkció halmazelméleti megfelelője a $P \cap Q$, és fordítva. Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy a* **diszjunkció** *halmazelméleti megfelelője a halmazok egyesítése. E megfeleltetéseket képletekkel is felírva:*

$$(x \in \overline{P}) \equiv \neg(x \in P) \equiv \neg p(x),$$

$$(x \in P \cap Q) \equiv (x \in P) \wedge (x \in Q) \equiv p(x) \wedge q(x),$$

$$(x \in P \cup Q) \equiv (x \in P) \vee (x \in Q) \equiv p(x) \vee q(x).$$

Fordítva, egy $p(x)$ logikai ítélethez hozzárendelhetünk egy P halmazt a következő módon: legyen H azon x dolgok halmaza, amelyekre p igaz vagy hamis értéket vesz fel; és legyen P a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre $p(x)$ igaz. Ilyen módon minden logikai kifejezés átírható halmazelméleti formulára, és így ábrázolható Venn-diagrammal. Például, ha $p(n)$ az az ítélet, hogy „az n szám páros", akkor H-nak választhatjuk az egész számok halmazát, és ekkor a $p(n)$ ítéletnek megfelelő P halmaz a páros számok halmaza, vagyis a $p(n)$ ítélet megegyezik az $n \in P$ ítélettel. Az 1-gyel jelölt azonosan igaz ítélet halmazelméleti megfelelője a H alaphalmaz, a 0-val jelölt azonosan hamis ítéleté pedig az üres halmaz.

Feladatok

Írjuk fel és ábrázoljuk Venn-diagrammokkal az alábbi logikai kifejezések halmazelméleti megfelelőit, ha a $p(x)$, $q(x)$ és $r(x)$ ítéleteknek a P, Q és R halmazok felelnek meg.

66.• $p(x) \Rightarrow q(x)$,

67. $p(x) \Leftrightarrow q(x)$,

68. $p(x) \vee \neg(q(x) \wedge r(x)) \equiv p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x)$,

69. $p(x) \vee (q(x) \wedge r(x)) \equiv (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))$,

70. $p(x) \Rightarrow 0 \equiv \neg p(x)$,

71. $[(p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee \neg q(x))] \vee [(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(x))] \equiv 1$.

Ha a $p(x)$ és $q(x)$ ($x \in H$) ítéleteknek a P és Q halmazok felelnek meg, akkor milyen halmazok közti összefüggések, illetve relációk felelnek meg az alábbi kvantoros kifejezéseknek:

72. $\forall x\, p(x)$,

73. $\forall x\, \neg p(x)$,

74. $\exists x\, p(x)$,

75. $\forall x\, (p(x) \Leftrightarrow q(x))$,

76.$^\triangleright$ $\forall x\, (p(x) \Rightarrow q(x))$,

77. $\neg \exists x\, (p(x) \wedge q(x))$.

Melyek azonosságok az alábbi egyenlőségek közül:

78. $\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) = (\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, q(x))$,

79. $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) = (\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$.

A következő feladatokban megadott halmazelméleti azonosságokat logikai műveletek és azonosságok segítségével igazoljuk:

80.$^\triangleright$ $(P \cup Q) \cap (P \cup R) \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (Q \cap R)$.

81. $P - (Q \cap R) \equiv (P - Q) \cup (P - R)$.

82. $(P \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) \cap (\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q}) \equiv \emptyset$.

83. $(P \cap \overline{Q}) \ominus (\overline{P} \cap Q) \equiv P \ominus Q$.

84. $P \cup Q \cup R \equiv (P - Q) \cup (Q - R) \cup (R - P) \cup (P \cap Q \cap R)$.

85.* Tudjuk, hogy $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv 1$ (l. **25.** feladat). Hogyan lehet, hogy az alábbi állítás mégsem azonosan igaz: „ha esik az eső, akkor fúj a szél, vagy ha fúj a szél, akkor esik az eső."

86.$^\triangleright$ Kontrapozíció alkalmazásával igazoljuk, hogy ha n és m olyan pozitív egészek, hogy $n + m \geq 49$, akkor $n \geq 25$, vagy $m \geq 25$.

87. A hét mely napjain igaz és mely napjain hamis az alábbi két állítás:
(1) „Ha ma kedd van, akkor holnap szerda”,
(2) „Ha ma kedd van, akkor holnap szombat”!

Az $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ állítást egymás megfordításainak nevezzük. Írjuk fel az alábbi matematikai állítások megfordítását, és döntsük el mindegyikről, igaz-e vagy nem:

88. „Ha egy természetes szám osztható ab-vel, akkor osztható a-val is és b-vel is”.

89. „Ha két négyszög egybevágó, akkor megfelelő oldalaik egyenlők egymással”.

90. „Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik négyzetével”.

Logikai áramkörök

M 3.7 *Az $A, B, C, \ldots$ betűk jelöljenek kétpólusú kapcsolókat. Legyenek $a, b, c, \ldots$ rendre az előbbi kapcsolókhoz rendelt logikai változók a következő megállapodással: az a logikai változó értéke igaz, ha az A kapcsoló be van kapcsolva, azaz képes az áram vezetésére, és hamis, ha nincs bekapcsolva, azaz nem képes az áram vezetésére. Az A kapcsolót a hozzá tartozó logikai értékkel a következő módon jelöljük:*

Hasonlóan definiáljuk a $b, c, \ldots$ logikai változókat is. Az $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c, \ldots$ jelű kapcsolókból soros és párhuzamos kapcsolással összekapcsolt áramkört logikai, vagy kapcsoló áramkörnek nevezzük. Ha több kapcsoló is a jelű, akkor ezek mindig azonos állásúak, míg egy a és egy $\neg a$ jelű mindig ellenkező állású. Az $a, b, c, \ldots$ változókat tartalmazó ítélet akkor tartozik az $A, B, C, \ldots$ kapcsolókból álló áramkörhöz, ha az ítélet pontosan akkor igaz, amikor az áramkör vezeti az áramot.

Feladatok

91.• Milyen logikai ítélet felel meg az A és B kapcsolók soros illetve párhuzamos kapcsolásával kapott áramköröknek?

Az alábbi logikai kifejezésekhez milyen áramkörök tartoznak:

92. $a \Rightarrow b$,

93. $a \Leftrightarrow b$,

94. $a \wedge b \wedge c \wedge \neg(a \wedge b)$,

95. $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

Írjuk fel az alábbi két kapcsoló áramkörhöz tartozó logikai kifejezéseket, hozzuk egyszerűbb alakra, és ennek alapján rajzoljuk fel az eredetivel ekvivalens, de egyszerűbb kapcsoló áramkört:

96.

97.

98. Készítsünk kapcsoló áramkört egy négyszemélyes szavazógépre, mely a „többség dönt" elvét követi, — azaz vezeti az áramot, ha legalább három kapcsoló be van kapcsolva, — döntetlen esetén pedig egy kitüntetett (elnöki) kapcsoló állásának megfelelően működik.