5. Analitikus térgeometria (megoldások)

1. Alkalmazzuk a **T 5.3** tételt:
$\overrightarrow{AB} = [2-1, -3+2, 0+3] = [1, -1, 3]$, $\quad \overrightarrow{AC} = [2, 3, -6]$, $\quad \overrightarrow{AD} = [-2, 3, -9]$.

2. A P pontnak az origótól mért távolsága az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor hosszával egyenlő.
$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$, $|\overrightarrow{OB}| = 14$, $|\overrightarrow{OC}| = 13$, $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{195}$.

3. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{22}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{54}$; $|\overrightarrow{BC}| = 6$. Az ABC háromszög nem egyenlő szárú.
$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{18}$; $|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{46}$; $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{46}$. A DEF háromszög egyenlő szárú.
$|\overrightarrow{GH}| = |\overrightarrow{GK}| = |\overrightarrow{HK}| = \sqrt{2}$. A GHK háromszög egyenlő oldalú.

4. Legyen az x tengely keresett pontja $P(x, 0, 0)$. Ekkor $|\overrightarrow{AP}| =$
$= \sqrt{(x+3)^2 + 16 + 64} = 12$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -11$. Két pont elégíti ki a feladat feltételeit: $P_1(5, 0, 0)$, $P_2(-11, 0, 0)$.

5. A z tengely egy pontja: $P(0, 0, z)$. Az $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ egyenlőségből
$\sqrt{1 + 9 + (z-7)^2} = \sqrt{25 + 49 + (z+5)^2}$ következik. Innen $z = -\frac{5}{3}$. A keresett pont: $P(0, 0, -\frac{5}{3})$.

6. $\overrightarrow{AB} = [-4, 8, -8]$; $\overrightarrow{AC} = [0, 2, 2]$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektor merőleges egymásra, tehát a három pont lehet egy téglalap három csúcsa.

7. A háromszög szögeit a szokásos módon jelölve

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}, \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}.$$

$\overrightarrow{AB} = [-4, 8, -8] = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC} = [-1, 2, -6] = -\overrightarrow{CA}$,
$\overrightarrow{BC} = [3, -6, 2] = -\overrightarrow{CB}$. Mivel $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} < 0$, ezért γ tompaszög.

8. a) A háromszög területe:

$$t = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}, \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [3, 2, 8], \quad t = \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

Az AB oldalhoz tartozó magasság: $m_{AB} = \dfrac{2t}{|\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{\dfrac{77}{21}} = \sqrt{\dfrac{11}{3}}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{7}{\sqrt{21 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{7}{18}}. \quad \sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}. \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{11}{7}}.$$

Megjegyzés: Mivel a feladat egyik kérdése miatt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ és $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ is kiszámolandó, kevesebb számolással jár a következő:
$t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$; $\quad \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 21$,
$\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = 6$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$ miatt $t = \frac{1}{2}\sqrt{21 \cdot 6 - 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{77}$.

b) $t=\dfrac{\sqrt{195}}{2}$, $m_{AB}=\sqrt{\dfrac{13}{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\dfrac{13}{15}}$.

c) $t=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $m_{AB}=\sqrt{\dfrac{6}{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{32}}$.

9. Emlékeztető: A $P_1(x_1,y_1,z_1)$ és $P_2(x_2,y_2,z_2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontja: $F\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$. A BC szakasz felezőpontja: $F_1(-1,1,-1)$. Az AC szakasz felezőpontja: $F_2(-1,1,4)$. Az AB szakasz felezőpontja: $F_3(3,2,0)$.

Az A, B, illetve a C csúcsból kiinduló súlyvonal hossza: $|\overrightarrow{AF_1}|=\sqrt{53}$, $|\overrightarrow{BF_2}|=\sqrt{98}$, illetve $|\overrightarrow{CF_3}|=\sqrt{77}$.

10. Tekintsük a bal oldali ábrát! Itt az O pont a koordinátarendszer origóját jelöli. A feladatban megadott arányból következik, hogy $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ és ezért $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$. Ebből kapjuk, hogy
$[x,y,z]=[a_1,a_2,a_3]+\frac{m}{m+n}[b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3]$.

A kijelölt szorzásokat elvégezve: $P\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\dfrac{na_2+mb_2}{m+n},\dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$.

11. Tekintsük a jobb oldali ábrát. Itt K és L a két harmadoló pontot, az O pedig a derékszögű koordináta-rendszer origóját jelöli. Az előző feladat eredményét $m=1$-gyel és $n=2$-vel alkalmazva $K(2,0,3)$ adódik, $m=2$-vel és $n=1$-gyel pedig $L(0,1,4)$.

12. Az A pont tükörképe a B ponton legyen $A'(x',y',z')$.

a) Mivel a B pont az origó, ezért $A'(-3,-4,1)$.

b) Az A pont az origó, ezért az $\overrightarrow{AB}$ vektor a B pontnak, az $\overrightarrow{AA'}$ vektor pedig az A' pontnak a helyvektora. Ezekből következik, hogy $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AB}=$
$=2[3,4,-1]=[6,8,-2]$. A tükörkép: $A'(6,8,-2)$.

c) Az AA' szakasznak felezőpontja a B pont. Ezért a **9.** megoldásnál leírtak alapján $\dfrac{-1+x'}{2}=2$, $\dfrac{-2+y'}{2}=-1$, $\dfrac{-5+z'}{2}=3$. Ezekből $A'(5,0,11)$.

d) A c) részben leírottakhoz hasonlóan járjunk el. $A'(-5,-1,2)$.

13. a) A harmadik csúcs: $C(x,0,0)$. A háromszög területe: $t=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=5$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[-10,x+7,9-3x]$. $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10x^2-40x+230}=10$. Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása. Ezért az x tengelyen nincs olyan C pont, amellyel az ABC háromszög területe 5 egység.

b) Két ilyen pont van: $C_1\left(0,0,\dfrac{51+\sqrt{261}}{18}\right)$, $C_2\left(0,0,\dfrac{51-\sqrt{261}}{18}\right)$.

14. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[y+1,-3,8-y]$, ezért $2t=\sqrt{2y^2-14y+74}$. Mivel a gyök alatti kifejezés az y minden értékére pozitív, mivel diszkriminánsa negatív. Így az előző egyenlet ekvivalens az $y^2-7y+37-2t^2=0$ egyenlettel. Ezért azok (és csak azok) a t értékek lesznek megfelelők, amelyekkel az előbbi másodfokú egyenletnek vannak valós megoldásai. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $49-4(37-2t^2)\geq 0$. Ebből $t\geq\sqrt{\frac{99}{8}}$ következik.

15. Legyen a negyedik csúcs $D(x,y,z)$. Három különböző eset van:

a) Az egyik átló az AB szakasz. Ekkor $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$. Áttérve koordinátás alakra: $[-4,2,0]+[x-3,y+1,z-2]=[-2,3,-6]$. Ebből a vektoregyenletből: $x=5$, $y=0$, $z=-4$. Tehát a negyedik csúcs: $D(5,0,-4)$.

b) Az egyik átló az AC szakasz. Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ egyenletből $D(1,-2,8)$.

c) Az AD szakasz az egyik átló. A negyedik csúcs: $D(-3,4,-4)$.

16. Tudjuk, hogy három vektor vegyes szorzata akkor és csak akkor 0, ha a három vektor komplanáris. Az is ismert, hogy koordinátáival adott három vektor vegyes szorzata a koordinátákból alkotott harmadrendű determinánssal egyenlő.

a) Az A, B, C, D pontnégyes akkor és csak akkor van egy síkban, ha az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorok komplanárisak. A három vektor vegyes szorzata:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -4\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-20\neq 0\,.$$

Tehát a négy pont nem egysíkú.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. A négy pont egysíkú.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. A négy pont egysíkú.

17. Ha a tetraéder egy csúcsából kiinduló három élvektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, akkor a tetraéder térfogata $V=\frac{1}{6}|\mathbf{abc}|$. Az A csúcsból kiinduló három élvektor: $\overrightarrow{AB}=[4,0,-3]$, $\overrightarrow{AC}=[3,2,-3]$, $\overrightarrow{AD}=[4,1,-3]$. Vegyes szorzatuk: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=3$. A térfogat: $V=\frac{1}{2}$.

A felszín: $F = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|\right) =$ $= \frac{1}{2}(\sqrt{109} + \sqrt{43} + 5 + 1)$. Az ABC lap területe $t = \frac{1}{2}\sqrt{109}$. A tetraéder térfogata $V = \dfrac{1}{3}tm$, ahol m az ABC laphoz tartozó magasság. Ezekből a magasság: $m = 3/\sqrt{109}$.

18. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & u-3 \end{vmatrix} = -6u - 14.$
A tetraéder térfogata 4 egység, ha $\frac{1}{6}|6u + 14| = 4$, azaz $|6u + 14| = 24$. Ebből az egyenletből az u ismeretlenre két megoldást kapunk. Ugyanis vagy $6u + 14 = -24$, amiből $u = -\frac{19}{3}$, vagy $6u + 14 = 24$, amiből $u = \frac{5}{3}$. A feladat feltételeit két pont elégíti ki:

$$D_1(2, 0, -\frac{19}{3}), \quad D_2(2, 0, \frac{5}{3}).$$

19. A pontnégyes akkor és csak akkor egysíkú, ha

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3-u \\ 1 & 0 & v-u \\ 0 & 1 & -1-u \end{vmatrix} = 2 - u - v = 0.$$

Ebből $u + v = 2$.

20. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ x-3 & y-1 & z \end{vmatrix} = 2x - 3y + 2z - 3.$
A térfogat $\frac{1}{6}|2x - 3y + 2z - 3| = 10$. Ebből egyrészt $2x - 3y + 2z - 63 = 0$, másrészt $2x - 3y + 2z + 57 = 0$ következik. A feladat feltételeit a $2x - 3y + 2z - 63 = 0$ és a $-2x + 3y - 2z - 57 = 0$ egyenletű sík pontjai elégítik ki.

21. A feladatok megoldásánál alkalmazzuk a **T 5.5** tételt.
a) $3x + 2y - 4z + 8 = 0$. b) $x + 2y + 4z = 0$. c) $2x + 3z - 8 = 0$.
d) $2y - z - 4 = 0$. e) $x = 0$. f) $y = 0$. g) $z = 0$. h) $y = 2$.

22. Előbb számítsuk ki az adott pontok valamelyikéből kiinduló és a másik két adott pontba mutató vektor (pl. $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PR}$) vektori szorzatát. Ha ez a vektori szorzat nullvektor, akkor (a két vektor egyállású, és ezért) a P, Q, R ponthármas egy egyenesen fekszik; ha nem nullvektor, akkor a három pont által meghatározott síknak normálvektora. Az utóbbi esetben alkalmazzuk a **T 5.5** tételt. (A tételbeli P_0 pontként az adott P, Q, R pontok bármelyikét választhatjuk.)
a) $x + y + 2z - 3 = 0$. b) $x + y + z = 1$. c) $4x - 22y + 3z = 0$.
d) $y = 0$. e) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$.

23. Az adott sík (egy) normálvektora az $\mathbf{n} = [7, -1, 3]$ vektor. A párhuzamosság miatt az $\mathbf{n}$ vektor a meghatározandó síknak is normálvektora. A **T 5.5** tételből következik, hogy a sík egyenlete: $7x - y + 3z - 8 = 0$.

24. Pl. az x tengelyt abban az M_x pontban metszi, ahol $y = z = 0$. A metszéspontok: $M_x(-6, 0, 0)$, $M_y(0, -3, 0)$, $M_z(0, 0, 2)$.

25. Mivel a három egyenletből álló egyenletrendszert csak az $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ számhármas elégíti ki, a $K(1, 1, 1)$ pont rajta van mindhárom síkon, de más közös pont nincs. A keresett sík egyenlete: $x + y + 2z - 4 = 0$.

26. A három sík egyenletéből összetett egyenletrendszernek nincs megoldása. Ezért a három síknak nincs közös pontja.

27. A három normálvektor vegyes szorzata:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\,.$$

Ez az érték nem 0, ezért a három normálvektor nem egysíkú. Tehát a síkok metszésvonalai közül semelyik kettő nem párhuzamos, így a három síknak egy és csak egy közös pontja van. (A metszéspont meghatározásához a három egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani, de ez most nem volt kérdés.)

28. Az adott négy egyenletből minden lehetséges módon válasszunk ki hármat. Így négy háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ha a négy egyenletrendszer mindegyike egyértelműen megoldható, akkor a négy sík közrefog egy tetraédert, melynek csúcsait az egyenletrendszerek megoldásai adják. (Abban az esetben pedig, ha legalább egy az egyenletrendszerek közül nem oldható meg, vagy legalább egynek végtelen sok megoldása van, a négy sík nem határol tetraédert.) Ha P_i jelöli a $\mathcal{S}_i$ síkkal szemközti pontot, akkor $P_1(3, 2, 2)$, $P_2(3, -4, 2)$, $P_3(0, -1, 2)$, $P_4(1, 0, 0)$. A tetraéder térfogata 6.

29. A meghatározandó sík (egy) normálvektora $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ az adott sík normálvektora. $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n} = [-3, -12, -3]$. A sík egyenlete: $x + 4y + z - 11 = 0$.

30. A keresett sík normálvektora merőleges mindkét adott sík normálvektorára, ezért egyenlete: $x + 5y - 3z - 3 = 0$.

31. A sík normálvektora: $\overrightarrow{AB} = [2, 10, -4]$. A sík egyenlete: $x + 5y - 2z - 16 = 0$.

32. A megoldásnál a rombusznak azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy átlói felezik a csúcsnál lévő szöget.

a) Az $\overrightarrow{AB} = [1, 2, -2]$ és az $\overrightarrow{AC} = [3, 4, 0]$ vektorok egységvektorai rendre:
$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{1}{3}[1, 2, -2]$, $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{1}{5}[3, 4, 0]$.
Ezek összege az A csúcsnál lévő belső szögfelezővel egyállású vektor, azaz a keresett sík normálvektora. $\frac{1}{3}[1, 2, -2] + \frac{1}{5}[3, 4, 0] = \frac{1}{15}[14, 22, -10]$.
A sík egyenlete: $7x + 11y - 5z - 15 = 0$.

b) Az A csúcsnál lévő külső szögfelezővel párhuzamos az a) részben kiszámított két egységvektor különbsége. A sík egyenlete: $2x + y + 5z - 30 = 0$.

33. A síktól megköveteljük, hogy merőleges legyen az A-hoz tartozó magasságvonalra. Ezért egyrészt párhuzamosnak kell lennie a $\overrightarrow{BC}$ vektorral, másrészt merőlegesnek kell lennie a háromszög síkjára, és így párhuzamosnak kell lennie az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ vektorral is. Ezekből kapjuk, hogy az $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{BC}$ vektor a sík normálvektora. A sík egyenlete: $5x + 7y + 2z - 14 = 0$.

34. Az e és f egyenes egyenletrendszerét hasonlítsuk össze a **T 5.8** tételbeli egyenletrendszerrel, a g egyenesét pedig a **T 5.9** tételben lévő (1) képlettel. Az

e, f és g egyenesek irányvektorai rendre: $\mathbf{u} = [3,-1,2]$, $\mathbf{v} = [-1,0,2]$, $\mathbf{w} = [-3,1,-2]$.
Az A pont rajta van az e egyenesen, mert a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, mindhárom egyenletből a t-re ugyanazt az értéket kapjuk. (Most 1-et.) Az A pont nincs rajta az f egyenesen, mert az egyenes minden pontjának y-koordinátája 4. Az A pont rajta van a g egyenesen, mert a pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, helyettesítési értékként ugyanazt a számot kapjuk. (Most zérust.)
Mivel az e és g egyenesek irányvektorai egyállásúak és az A pont rajta van mindkét egyenesen, ezért ezek az egyenesek egybeesnek.
A B pont nincs rajta az e és g egyenesek egyikén sem, de rajta van az f egyenesen.

35. $e:\ \dfrac{x-5}{2} = -y = 1-z;\qquad f:\ 2-x = \dfrac{z+1}{3},\ y=2;\qquad g:\ y=3,\ z=4.$

36. a) Az egyenes $x_0 = 16$ koordinátájú pontja: $P_0(16,24,20)$.
A keresett paraméteres egyenletrendszer: $x = 16+3t$, $y = 24+5t$, $z = 20+4t$.
b) $P_0(3,5,2)$, $\quad x=3,\ y=5+2t,\ z=2+t$.
c) $P_0(7,4,-3)$, $\quad x=7+t,\ y=4,\ z=-3$.

37. Alkalmazzuk a **T 5.8** és **T 5.9** tételeket.
a)
$$\begin{aligned} x &= -2-t \\ y &= 5+2t \\ z &= 1+3t \end{aligned},\qquad -x-2 = \tfrac{y-5}{2} = \tfrac{z-1}{3}.$$
b) Irányvektor: $\overrightarrow{PQ} = [-4,0,1]$
$$\begin{aligned} x &= 3-4t \\ y &= 1 \\ z &= 2+t \end{aligned},\qquad \tfrac{x-3}{4} = 2-z,\ \ y=1.$$
c)
$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 1 \\ z &= 4+t \end{aligned},\qquad x=5,\ \ y=1.$$
d) Irányvektor: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [3,4,-6]$.
$$\begin{aligned} x &= 6+3t \\ y &= -3+4t \\ z &= 4-6t \end{aligned},\qquad \tfrac{x-6}{3} = \tfrac{y+3}{4} = \tfrac{4-z}{6}.$$
e) Az irányvektor a két normálvektor vektori szorzata: $[2,-4,2]$.
$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 4-4t \\ z &= 1+2t \end{aligned},\qquad \tfrac{x}{2} = \tfrac{4-y}{4} = \tfrac{z-1}{2}.$$

38. a) $\alpha = 2$.
b) Az egyenes irányvektorának merőlegesnek kell lennie a sík normálvektorára. Ezért $\alpha = 2$ vagy $\alpha = -2$.
c) Akkor és csak akkor van metszéspont, ha az egyenes nem párhuzamos a síkkal. Ekkor az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának skaláris szorzata nem zérus. Most ez a szorzat minden α-ra zérus. Tehát nincs olyan α, amely kielégíti a leírt követelményt.

d) A követelmény olyan α-val teljesíthető, amellyel a sík normálvektora és az $\overrightarrow{AB}$ vektor egyállású, azaz, ha létezik olyan k valós szám, amellyel

$$\overrightarrow{AB} = [\alpha - 2, \alpha + 2, 4] = k[3, 5, \frac{\alpha}{4}] .$$

Ez a vektoregyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 3k \\ \alpha + 2 &= 5k \\ 4 &= \frac{k\alpha}{4} . \end{aligned}$$

Az $k = 2$ és $\alpha = 8$ érték mindhárom egyenletet kielégíti. Tehát az $\alpha = 8$ értékre a követelmény teljesül.

39. Az egyenesen kijelölünk egy pontot, pl. $A(2, 0, 2)$.
A sík egy normálvektora: $\overrightarrow{AP} \times [1, 3, 0] = [6, -2, -13]$.
A sík egyenlete: $6x - 2y - 13z + 14 = 0$.

40. $x - 6y - 4z + 1 = 0$.

41. $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}t , \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t \end{cases}$ ill. $\begin{cases} x = -2 + \frac{8}{3}u \\ y = u , \\ z = \frac{u}{3} \end{cases}$ ill. $\begin{cases} x = -2 + 8v \\ y = 3v \\ z = v . \end{cases}$

A paraméter kiküszöbölésével rendre

$$x = \frac{8y - 6}{3} = 8z - 2 , \quad \frac{3x + 6}{8} = y = 3z , \quad \frac{x + 2}{8} = \frac{y}{3} = z$$

adódik. Könnyen ellenőrízhető, hogy a három egyenletrendszer ekvivalens.

42. a) Helyettesítsük a sík egyenletébe az egyenes egyenletrendszerében lévő x, y és z értékeket. Kapjuk, hogy $t = 1$. Egy közös pont van: $D(2, 1, 2)$.
b) Célszerű áttérni paraméteres egyenletrendszerre. Ettől kezdve úgy járunk el, mint az a) részben. Közös pont: $D(3, -1, 4)$.
c) A síknak és az egyenesnek nincs közös pontja.
d) Az a) részhez hasonlóan eljárva, a $0 \equiv 0$ azonosságot kapjuk. Az egyenes benne fekszik a síkban.

43. $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$ vagy $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = z$.

44. Az AB oldal F felezőpontja: $F(-1, 4, -2)$. A súlyvonal irányvektora $\overrightarrow{FC}$; egyenletrendszere: $x = 4 - 5t , \;\; y = -7 + 11t , \;\; z = -2 .$

45. A **32.** feladat megoldásánál elmondottak szerint a szögfelező irányvektora: $\mathbf{v} = \frac{1}{7}[2, -3, 6] + \frac{1}{7}[-3, 6, 2] = \frac{1}{7}[-1, 3, 8]$, egyenletrendszere: $1 - x = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}$.

46. A sík (egy) normálvektora az adott sík normálvektorának és az adott egyenes irányvektorának vektori szorzata. Egyenlete: $2x - y - 5z - 9 = 0$.

47. Az egyenesek irányvektorai: $\mathbf{v}_e = [3, -1, -2]$, $\mathbf{v}_f = [-6, 2, 4]$, $\mathbf{v}_g = [2, 0, 3]$, $\mathbf{v}_h = [2, 0, 3]$, $\mathbf{v}_k = [-3, 1, 2]$, $\mathbf{v}_l = [6, -2, -4]$. Látható, hogy az e, f, k, l

egyenesek párhuzamosak, hasonlóképpen g és h. Egy pontot választva az egyik egyenesről, és koordinátáit behelyettesítve egy vele párhuzamos egyenes egyenletrendszerébe, megállapíthatjuk, hogy a két egyenes egybe esik vagy nem. Feladatunkban például a $P(2,0,1)$ pont rajta fekszik az e, k és l egyeneseken, ezért ezek azonosak, de nincs rajta az f egyenesen, így f különbözik az $e(=k=l)$ egyenestől. Hasonlóan, a $Q(-3,0,9)$ pont behelyettesítése mutatja, hogy a g és a h egyenesek azonosak. Tehát valójában csak három különböző egyenesünk van: az $e=k=l$, az f és a $g=h$ egyenesek.
Általában két egyenes kölcsönös helyzete úgy határozható meg, hogy megoldjuk a két egyenes (akár paraméteres, akár paramétermentes) egyenletrendszereiből alkotott egyenletrendszert. Ha ez egyértelműen megoldható, akkor a két egyenes metsző, ha végtelen sok megoldás van, akkor a két egyenes azonos, ha nincs megoldás, akkor az egyeneseknek nincs közös pontjuk.
Például az e és h kölcsönös helyzetét megadja az alábbi ötismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= 3t+2 \qquad & x &= 2u-3 \\ y &= -t & y &= -1 \\ z &= 1-2t & z &= 3u+9. \end{aligned}$$

(Vigyázzunk, a két egyenes paramétere egymástól független, ezért különböző betűkkel jelöljük.) Az egyenletrendszer ellentmondó, tehát a két egyenesnek nincs közös pontja (kitérőek, mivel nem párhuzamosak). Hasonlóképp ellentmondó az e, k, l valamelyikének és g illetve h valamelyikének egyenletrendszeréből alkotott egyenletrendszer. Például k és g esetén az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{8-x}{3} &= y+2 \qquad & y &= -1 \\ \frac{z+3}{2} &= y+2 & \frac{x+5}{2} &= \frac{z-6}{3} \cdot \end{aligned}$$

Végül az f és g (illetve f és h) egyenletrendszereiből alkotott egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy f és g metszéspontja a $(-5,-1,6)$ pont.
Megjegyzés: Két különböző állású egyenes esetén egy másik módszerrel is eldönthető, hogy metszik-e egymást, vagy nem. Kijelölünk az egyeneseken egy-egy pontot; legyenek ezek A és B. Majd kiszámítjuk a két irányvektor és az $\overrightarrow{AB}$ vektor vegyes szorzatát. Ez a szorzat akkor és csak akkor $\mathbf{0}$ (különböző állású egyenesek esetén), ha a két egyenes metsző. Például az e egyenesről az $A(2,0,1)$, a h egyenesről a $B(-3,-1,9)$ pontot választva a vegyes szorzat nem $\mathbf{0}$, tehát a két egyenes kitérő.

48. A **47.** feladat megoldása szerint eljárva, és megoldva a két egyenes egyenletrendszeréből kapott egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy az csak $\lambda=11$ esetén oldható meg egyértelműen. A metszéspont: $[20/11, -41/11, 117/11]$.
Az előző feladat megoldásának végén tett megjegyzés szerinti megoldás: az e, illetve az f egyenes egy-egy pontja: $A(-2,0,1)$, $B(3,1,\lambda)$. A két irányvektor: $\mathbf{v}_1=[2,-3,4]$ és $\mathbf{v}_2=[1,4,2]$. A $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\overrightarrow{AB}=0$ egyenletből kapjuk, hogy $\lambda=11$.

49. $\lambda = -\frac{34}{5}$.

50. Az x-tengely esetén: $\lambda = -\frac{3}{4}$; metszéspont: $M\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$,
Az y-tengely esetén: $\lambda = -\frac{9}{2}$; metszéspont: $M(0, -5, 0)$,
Az z-tengely esetén: nincs ilyen λ.

51. Az e egyenes két sík metszésvonalaként lett megadva.
Az x-tengely esetén: $\lambda = -4$; metszéspont: $M(2, 0, 0)$.
Az y-tengely esetén: $\lambda = 9$; metszéspont: $M(0, -3, 0)$.
Az z-tengely esetén: $\lambda = 3$; metszéspont: $M(0, 0, 3)$.

52. Az A ponton áthaladó és az adott síkra merőleges e egyenes egyenletrendszere: $x = 4+t,\ y = -3-t,\ z = 5+t$. Az e egyenes döféspontja a síkon: $D(3, -2, 4)$. A tükörkép: $A'(2, -1, 3)$, mert $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA'}$.

53. Az A ponton áthaladó és az e egyenesre merőleges sík egyenlete: $3x + 5y + 2z - 7 = 0$. Az e egyenes döféspontja ezen a síkon: $D(3, -2, 4)$. A tükörkép: $A'(4, -3, 5)$.

54. Tükrözzük az egyenes két pontját (az egyik az egyenes és a sík közös pontja is lehet; ez a tükrözéskor helybenmarad). Az egyenes tükörképe:
$e' :\ x = -5 - 8t,\ y = 1,\ z = -5t$.

55. Meghatározzuk e-nek két különböző pontját, és mindkettőnek az $x+2y-z=0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét. A két vetületi pontot összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = x_0+u \quad y = y_0-4u \quad z = z_0-7u$. Ezután $t = x_0 + u$ helyettesítéssel (a két pont választásától függetlenül) az f egyenes egyenletrendszere: $x = t,\ y = 1 - 4t,\ z = 2 - 7t$.

56. A metszésvonal irányvektora $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, ahol $\mathbf{n}_1$ az első, $\mathbf{n}_2$ a második sík normálvektora: $\mathbf{v} = [4, -1, -3]$.
A keresett sík normálvektora: $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)\times\mathbf{u}$, ahol $\mathbf{u}$ az egyenes irányvektora.
$\mathbf{n} = \left[\frac{7}{6}, -\frac{13}{3}, 3\right]$. A metszésvonal egy pontja: $A(0, 0, 0)$.
A sík egyenlete: $7x - 26y + 18z = 0$.

57. a) $5x + 4y + 9z + 15 = 0$. b) $y + z = 0$. c) $x + z + 3 = 0$.
d) $x - y + 3 = 0$. e) $x - 4y - 3z + 3 = 0$.

58. Az origón és az e egyenesen átmenő sík egyenlete: $8x + 6y + 5z = 0$. A sík és az f egyenes közös pontja: $M(2, 4, -8)$. A feltételeknek a PM egyenes tesz eleget; egyenletrendszere: $x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{4}$.

59. Egyetlen ilyen egyenes van, egyenletrendszere: $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+5}{2} = 3 - z$.

60. A P ponton és az e egyenesen átmenő S sík egyenlete: $2x + 3y - z - 1 = 0$. Ez a sík tartalmazza az f egyenest. Ezért a feladatnak megoldása az S síknak minden olyan egyenese, amely átmegy P-n és nem párhuzamos az e és f egyenesek egyikével sem.

61. Nincs ilyen egyenes. (A P ponton és az e egyenesen átmenő sík egyenlete: $3x + y - 11z + 4 = 0$.)

62. $K(1, 1, -1)$. Az e egyenes irányvektora $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, az $\mathcal{S}$ sík normálvektora $\mathbf{n} = [1, 1, 1]$, az f egyenes irányvektora legyen $\mathbf{v} = [a, b, c]$.

Mivel az f benne van az $\mathcal{S}$ síkban és merőleges az e egyenesre, ezért $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ és $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}=0$. Ebből $a=0$ és $b=-c$ következik. Tehát az f egy irányvektora a $[0,1,-1]$ vektor; paraméteres egyenletrendszere: $f:\ x=1,\ y=1+t,\ z=-1-t$.

63. A P ponton átmenő és az $\mathbf{a}$-ra merőleges sík egyenlete: $6x-2y-3z+1=0$. Ez a sík az adott egyenest az $M(1,-1,3)$ pontban metszi. A PM egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{2-y}{3}=\frac{z+3}{6}\,.$$

64. A keresett egyenes $\mathbf{v}$ irányvektora a sík normálvektora, ezért $\mathbf{v}=[2,4,-1]$. Az e egyenes irányvektora: $\mathbf{u}=[2,-1,1]$. Az e egyenesen át vegyük fel (a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos, tehát) az $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ normálvektorú síkot (egyenlete: $3x-4y-10z=0$). Az f egyenes döféspontja ezen a síkon

$$D\left(\frac{88}{41},\frac{51}{41},\frac{6}{41}\right)\,;$$

ez a keresett egyenes egyik pontja. Az egyenes egyenletrendszere:

$$82x-176=41y-51=24-164z\,.$$

65. A síkok normálvektorai komplanárisak, mert vegyes szorzatuk zérus. Ugyanakkor a normálvektorok páronként nem egyállásúak. Ezekből következik, hogy bármelyik két sík különböző, de bármelyik kettőnek van metszésvonala és ezek egyező állásúak.
A metszésvonalak (közös) irányvektora: $\mathbf{v}=[1,2,1]$.
Három ilyen síknak akkor és csak akkor van közös pontja, ha páronkénti metszésvonalaik egybeesnek.
Válasszunk ki egy P pontot két sík metszésvonalán. A P pont akkor és csak akkor van rajta a harmadik síkon is, ha $\lambda=3$. Eszerint:
a) Van közös pont (egyenes is), ha $\lambda=3$. b) Nincs közös pont, ha $\lambda\neq 3$.

66. Ha E az e egyenesnek, F pedig az f egyenesnek egy-egy pontja, akkor a g egyenes átmegy az EF szakasz felezőpontján.

$$g:\ \frac{x-4}{4}=y-\frac{3}{2}=z-\frac{9}{2}\,.$$

67. Ha a $P(u,v,w)$ pont rajta van az e egyenesen, akkor

$$\frac{u-1}{2}=-v\ \text{ s }\ -v=\frac{w+3}{3}\,;$$

másrészt, a **T 5.11** tétel alapján $\frac{1}{3}|u+2v+2w+11|=2$. Ebből a három egyenletből a következő két megoldást kapjuk: $P_1(1,0,-3)$, $P_2(-3,2,-9)$.

68. A távolság: $\frac{\sqrt{6}}{12}$ egység.

69. a) A **T 5.14** tétel alapján: $\cos(e,f)\angle=\cos(e,g)\angle=\dfrac{5}{7}$, $\cos(f,g)\angle=\dfrac{3}{7}$.
b) Az (e,f), (e,g) és (f,g) síkok normálvektorai rendre: $\mathbf{n}_1=[1,2,-1]$,

$\mathbf{n}_2 = [2, -1, -1]$, $\mathbf{n}_3 = [3, 1, 0]$. Az (e, f) és (e, g) síkok szögének koszinusza:

$$\frac{|\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{6}; \quad \text{tangense} \sqrt{35}\,.$$

Az (e, f) és (f, g), ill. az (e, g) és (f, g) síkok szögének tangense egyaránt $\sqrt{\frac{7}{5}}$.
c) **T 5.15** alapján a szögek szinuszai a feladatban megadott sorrendben:
$\sqrt{\dfrac{2}{7}}$, $\sqrt{\dfrac{10}{21}}$, $\sqrt{\dfrac{10}{21}}$.

70. a) Az x tengely irányvektora $\mathbf{i} = [1, 0, 0]$, a sík normálvektora $\mathbf{n} = [1, t, 1]$. A **T 5.15** tétel alapján

$$\sin(x, S)\angle = \frac{|\mathbf{in}|}{|\mathbf{i}||\mathbf{n}|} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ebből $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ következik, aminek nincs valós t megoldása.
b) Az előbbihez hasonlóan

$$\sin(y, S)\angle = \frac{|t|}{\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Két megoldás van: $t_1 = \sqrt{6}$, $t_2 = -\sqrt{6}$.
c) Nincs ilyen t érték.

71. Legyen a keresett sík: $S:\ Ax + By + Cz + D = 0$. A P és Q pont rajta van az S síkon, ezért $A + B + \sqrt{2}C + D = 0$ és $2B + \sqrt{2}C + D = 0$. Ezekből $A = B$ következik. Az adott sík és az S sík hajlásszögének koszinusza:

$$\frac{|[A, A, C][1, 1, 0]|}{\sqrt{2A^2 + C^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Ebből $C^2 = 2A^2$. A $C = A\sqrt{2}$ értékkel számolva kapjuk, hogy a keresett sík normálvektorai $\mathbf{n} = [A, A, A\sqrt{2}]$ alakúak és $D = -4A$, ahol az A tetszőleges (nem zérus) valós szám lehet. Ekkor a sík egyenlete: $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$. A $C = -A\sqrt{2}$ esetben pedig $x + y - \sqrt{2}z = 0$.

72. A keresett egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = [a, b, c]$. Az adott sík, illetve az xy sík normálvektora $\mathbf{n} = [1, -2, 0]$, illetve $\mathbf{k} = [0, 0, 1]$.
Az e egyenes benne van az adott síkban, ezért $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = a - 2b = 0$. Ez utóbbi és a **T 5.15** tétel alapján

$$\frac{|c|}{\sqrt{5b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ebből $c^2 = 15b^2$. Két megoldás van:

$$e_1:\ \frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z-4}{\sqrt{15}}; \quad e_2:\ \frac{x-2}{2} = y - 1 = -\frac{z-4}{\sqrt{15}}\,.$$

73. Legyen a keresett egyenes e irányvektora $\mathbf{v} = [a, b, c]$. A **T 5.14** tétel alapján egyrészt

$$\cos(x, e)\angle = \frac{|\mathbf{iv}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

másrészt

$$\cos(y, e)\angle = \frac{|\mathbf{jv}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezekből $b^2 = a^2$ és $c^2 = 2a^2$. A feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x = y = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad x = y = -\frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x = -y = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad x = -y = -\frac{z}{\sqrt{2}}.$$

74. a) Legyen a keresett egyenes g, irányvektora: $\mathbf{v} = [a, b, c]$. **T 5.14** alapján

$$\cos(e, g)\angle = \frac{|2a + c|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}, \quad \cos(f, g)\angle = \frac{|-a + 2c|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ezekből $|2a + c| = |-a + 2c|$ következik.
A $2a + c = -a + 2c$, illetve $2a + c = a - 2c$ felbontásból $b^2 = 10a^2$, illetve $b^2 = 10c^2$ adódik. Az $a = 1$, illetve $c = -1$ választással kapjuk, hogy a feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x - 3 = \frac{y - 4}{\sqrt{10}} = \frac{z + 1}{3}, \quad x - 3 = -\frac{y - 4}{\sqrt{10}} = \frac{z + 1}{3},$$

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{\sqrt{10}} = -(z + 1), \quad \frac{x - 3}{3} = -\frac{y - 4}{\sqrt{10}} = -(z + 1).$$

b) Két ilyen egyenes van ($b^2 = 0$); egyenletrendszereik:

$$x - 3 = \frac{z + 1}{3}, \ y = 4 \quad \text{s} \quad -\frac{x - 3}{3} = z + 1, \ y = 4.$$

c) Nincs ilyen egyenes (mert $b^2 < 0$ adódik).

75. A keresett sík egyenlete: $Ax + By + Cz + D = 0$. A metszésvonal irányvektorára $[1, -3, -5]$, az együtthatókra, A, B, C, D-re pedig az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 \\ A - 3B - 5C &= 0 \\ |A + 2B - C| &= |2A - B + C|. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet a **71.** feladat megoldása szerint nyerhető. Két megoldás van:

$x - 3y + 2z = 0$, a szög koszinusza: $\sqrt{\frac{7}{12}}$.

$3x + y - 4 = 0$, a szög koszinusza: $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

76. A keresett egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = [a, b, c]$. A **73.** feladat megoldásához hasonlóan eljárva a következő egyenletrendszert kapjuk: $|a| = |b| = |c|$. A feltételeket négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik:

$$x = y = z, \qquad x = -y = z, \qquad -x = y = z, \qquad -x = -y = z.$$

A szög koszinusza mind a négy esetben: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

77. Legyen a keresett egyenes irányvektora $\mathbf{v} = [a, b, c]$. Az e, f és a g egyenes egy-egy irányvektorát jelölje rendre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és a $\mathbf{v}_3$ vektor. A **T 5.14** tétel alapján

$$\frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_1|} = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_2|} = \frac{|\mathbf{v}\mathbf{v}_3|}{|\mathbf{v}||\mathbf{v}_3|}.$$

Ebből $|2a + 3b + c| = |3a - 2b - c| = |-a + 3b + 2c|$. A feladat feltételeit négy egyenes elégíti ki. Egyenletrendszereik és a szögek koszinuszai:

$x - 1 = 2 - y = \frac{z+1}{3}$; $\sqrt{\frac{2}{77}}$. $\quad x - 1 = \frac{2-y}{5} = \frac{z+1}{3}$; $\frac{\sqrt{10}}{7}$.

$x - 1 = \frac{2-y}{5} = \frac{3z+3}{29}$; $\sqrt{\frac{2}{301}}$. $\quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5} = -\frac{z+1}{11}$; $\sqrt{\frac{10}{217}}$.

78. Legyen $P(x, y, z)$ valamelyik szögfelező sík tetszőleges pontja. A **T 5.11** tétel alapján minden ilyen pontra

$$\frac{|x - 3y + 2z - 2|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x + y + 3z - 5|}{\sqrt{14}}$$

teljesül. A két szögfelező sík egyenlete: $x+4y+z-3 = 0$ s $3x-2y+5z-7 = 0$.

79. Legyen a másik végpont $B(x, y, z)$.
Ekkor $6 = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$. Figyelembe véve, hogy a B pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletrendszerét, a B paramétereként $t = \pm 2$ adódik. Megoldások: $B_1(2, 7, 3)$ és $B_2(-6, -1, -1)$.

80. Két ilyen pont van: $P_1(0, 0, \frac{4}{5})$, $P_2(0, 0, 2)$.

81. Két ilyen pont van: $P_1(0, 0, -2)$, $P_2(0, 0, \frac{-82}{13})$.

82. A metszésvonal egyenletrendszere: $\frac{3-x}{3} = \frac{y+1}{2} = z$. Olyan $P(u, v, w)$ pontot keresünk, amely rajta van a metszésvonalon és amelyre

$$\frac{|u + 2v + w + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|u + 2v + w - 3|}{\sqrt{6}}.$$

Ebből és a metszésvonal egyenletrendszeréből kapjuk, hogy a megoldás: $P(3, -1, 0)$.

83. a) A P ponton áthaladó és az e-merőleges sík egyenlete: $3x - y + 9 = 0$. Az e egyenes metszéspontja ezen a síkon: $M(-2, 3, 2)$. A távolság 5 egység.
2. megoldás. Az **T 5.12** képletébe az e egyenes két pontját, például $Q(1, 2, 2)$ és $R(4, 1, 2)$) pontokat helyettesítve a keresett távolság: $\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|} = 5$.

b) A távolság: $6\sqrt{3}$ egység. $\quad$ c) A távolság: $\sqrt{17}$ egység.

d) A távolság: $\frac{\sqrt{315}}{7}$ egység. $\quad$ e) A távolság: $\sqrt{\frac{17}{18}}$ egység.

84. a) Az e, illetve az f egyenes (egy) irányvektora $\mathbf{v}_1 = [2, -1, -2]$, illetve $\mathbf{v}_2 = [4, -3, -5]$. A két egyenes egy-egy pontja: $A(-4, 4, -1)$, ill. $B(-5, 5, 5)$. Az $\overrightarrow{AB}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ vegyes szorzat értéke -9. Ez nem zérus, tehát a két egyenes kitérő. A távolság a **T 5.13** tétel alapján 3 egység.

b) A távolság: $2 \cdot \frac{23}{\sqrt{762}}$ egység.

c) A távolság: 3 egység.

85. a) Az e, illetve az f egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_1 = [-3, 4, 1]$, illetve $\mathbf{v}_2 = [1, -1, -1]$. A két egyenes távolsága: $d(e, f) = \sqrt{14}$. A normáltranszverzális irányvektora: $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = [-3, -2, -1]$. A továbbiakban az **64.** feladat megoldásában leírt módon járunk el. A t normáltranszverzális egyenletrendszere:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{2} = z - 2\,.$$

b) $d(e, f) = \sqrt{41}$. $\quad t:\ x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$.

c) $d(e, f) = 2\sqrt{17}$. $\quad t: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

d) $d(e, f) = \sqrt{14}$. $\quad t: 1 - x = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

86. Legyen S_1 a P_1P_2 szakasz felezőpontján átmenő és a P_1P_2 szakaszra merőleges sík, S_2 pedig a P_1P_3 szakasz felezőpontján átmenő és a P_1P_3 szakaszra merőleges sík; G az S_1 és S_2 metszésvonala. S_1 egyenlete: $6x + 4y + z = 47{,}5$; S_2 egyenlete: $4x + y + 4z = 30{,}5$. $G:\ x = 3t,\ x = \frac{149}{20} + 15t,\ y = \frac{7}{10} - 20t,\ z = -10t$.

87. Két ilyen sík van, mert $d(e, P) = \sqrt{2}$ és ez nagyobb 1-nél. Legyen a keresett S sík egyenlete: $Ax + By + Cz + D = 0$. Mivel $d(P, 5) = 1$, a **T 5.11** szerint

$$(*) \qquad \frac{|2A + B + 3C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1\,.$$

Az e egyenesen felvéve két pontot, két további egyenletet kapunk az A, B, C, D együtthatókra.

Legyen ez a két pont pl. a $Q(1, 3, 4)$ és $R(1, 0, 3)$; ekkor az $A + 3B + 4C + D = 0$ és $A + 3C + D = 0$ egyenleteket kapjuk, ezekből C és $A + D$ értékét B-vel kifejezhetjük: $C = -3B$ és $A + D = 9B$ (a Q és R más választása esetén is ezt kapjuk.) A $(*)$ egyenletbe helyettesítve $|A + B| = \sqrt{A^2 + 10B^2}$ adódik. Ebből $2AB = 9B^2$ következik. A $B = 0$ esetben $A \neq 0$, és ezért A-t választhatjuk 1-nek, ezzel a keresett sík egyenlete $x - 1 = 0$. A $B \neq 0$ esetben pedig $B = 2$ választással $9x + 2y - 6z + 9 = 0$. A síkok szögének koszinusza: $\frac{9}{11}$.

88. Előzetes megjegyzés: Egy T területű háromszöget vetítsünk merőlegesen egy síkra. Ha ez a sík és a háromszög síkja α szöget zár be, akkor a vetületi háromszög T' területére $T' = T\cos\alpha$. Az ábra alapján ezt könnyen beláthatjuk. Itt az RM szakasz a PQ oldalhoz tartozó magasság a PQR háromszögben, $R'M$ pedig ennek merőleges vetülete. A feladatban $T' = \frac{1}{2}T$; ezért $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.
A keresett S sík tartalmazza az x tengelyt, ezért egyenlete $By + Cz = 0$ alakú.

A $P_1P_2P_3$ sík normálvektora: $[-2,-1,3]$. Az S sík és a $P_1P_2P_3$ sík szögének koszinuszát a normálvektorokkal kifejezve, a $\dfrac{|3C-B|}{\sqrt{14}\sqrt{B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2}$ egyenletet kapjuk, ebből pedig azt, hogy $5B^2+12BC-11C^2=0$. C^2-tel osztva: $5\left(\frac{B}{C}\right)^2+12\frac{B}{C}-11=0$. (Sem C, sem B nem lehet 0, mert akkor a keresett sík normálvektora nullvektor lenne.) Két sík elégíti ki a feltételeket; egyenleteik:

$$S_1:\ \frac{-6+\sqrt{91}}{5}y+z=0 \ \text{ és } \ S_2:\ \frac{-6-\sqrt{91}}{5}y+z=0\,.$$

A P_1 és P_2 csúcs távolsága ezektől a síkoktól:

$$d(S_1,P_2)=2d(S_1,P_1)=\frac{-1+\sqrt{91}}{2\sqrt{38-3\sqrt{91}}}\,.$$

$$d(S_2,P_2)=2d(S_2,P_1)=\frac{1+\sqrt{91}}{2\sqrt{38+3\sqrt{91}}}\,.$$

89. Az A, B, C ponthármas akkor és csak akkor nem kollineáris, ha $t\neq 9$. A síkok közös pontja: $K(2,1,4)$. Ha $t\neq 9$, akkor az ABC sík egyenlete a t paraméter értékétől függetlenül $x-y-1=0$, és így a K pont távolsága az ABC síktól $\sqrt{2}$ egység.

90. A P ponton áthaladó és az e egyenesre merőleges S sík tartalmazza a meghatározandó m egyenest (ha létezik ilyen), továbbá az m és e egyenesek t normáltranszverzálisát. Ezt mutatja az ábra, ahol az e egyenes merőleges a rajz síkjára. Az S sík egyenlete: $3x-6y+2z-1=0$. Az e egyenes és az S sík M metszéspontjára: $M(7,5,5)$. Az $|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{98}>7$, ezért két olyan egyenes van, amely kielégíti a feladat feltételeit.
Feltevésünk szerint az e és m egyenesek távolsága $(MQ=)$ 7 egység. Ebből és az $MP=\sqrt{98}$ értékből következik, hogy az MPQ egyenlőszárú derékszögű háromszög: $PQ=7$. Ez utóbbiak és az **5.14** tétel alapján

(1) $$\cos(\overrightarrow{MP},m)=\cos 45^\circ=\frac{|\overrightarrow{MP}\cdot\mathbf{m}|}{\sqrt{98}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

ahol az $\mathbf{m}=[a,b,c]$ vektor az m egyenes irányvektora. Válasszuk az $\mathbf{m}$ vektort úgy, hogy

(2) $$|\mathbf{m}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$$

legyen. Ez utóbbi és $\overrightarrow{MP}=[-8,-5,-3]$ miatt az (1) összefüggésből

(3) $$8a+5b+3c=49$$

következik. Az m egyenes merőleges az e egyenesre, ezért

(4) $$3a-6b+2c=0\,.$$

A (2), (3) és (4) egyenletekből kapjuk, hogy a keresett egyenesek irányvektorai: $\mathbf{m}_1=[2,3,6]$ és $\mathbf{m}_2=[6,2,-3]$. A két egyenes egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + 6t \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t\,. \end{cases}$$

91. A **63.** feladat megoldásához hasonlóan járunk el. $2 - x = y - 1 = z - 2$.

92. A szög koszinusza: $\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$. A feltételt két pont elégíti ki: $D_1\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ és $D_2\left(\frac{79}{34}, \frac{79}{34}, -\frac{11}{68}\right)$.

93. $B\left(\frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$.

94. A C csúcs lehetséges értékei: $C_1(0,0,0)$ és $C_2(6, 4\sqrt{3}, 0)$. Az ABC lap területe: $7\sqrt{3}$ egység.
A tetraéder magassága: 4 egység. A negyedik csúcs (D) rajta van az adott egyenesen és vagy a $z = 4$, vagy pedig a $z = -4$ egyenletű síkon van. A D csúcs lehet: $D_1(2,1,4)$ és $D_2(2,5,-4)$.
Négy tetraéder van: ABC_1D_1, ABC_1D_2, ABC_2D_1, ABC_2D_2.

95. a) Az r lehetséges értékei: 2 és -2. A távolság mindkét esetben: $\frac{7}{\sqrt{26}}$.
b) Nincs olyan r szám, amelynél az e egyenes merőleges az α síkra.

96. A három tükörkép a feladatbeli sorrendben: $A(-3,7,1)$, $B\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, $C\left(-\frac{13}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}\right)$. Az ABC sík egyenlete: $35x + 4y + 6z + 71 = 0$. Távolság: $\dfrac{120}{\sqrt{1277}}$ egység.

97. A négy tetraéder csúcsai:
a) $A(5,4,2)$, $B(3,2,1)$, $C(3,4,2)$, $D(-3,2,-1)$.
b) $A(5,4,2)$, $B(3,2,1)$, $C(3,4,2)$, $D(9,6,5)$.
c) $A(5,4,2)$, $B(7,6,3)$, $C(3,4,2)$, $D(-3,2,-1)$.
d) $A(5,4,2)$, $B(7,6,3)$, $C(3,4,2)$, $D(9,6,5)$.
Mind a négy tetraéder térfogata $\frac{4}{3}$ egység.

98. Ha létezik ilyen, d hosszúságú szakasz, legyen $\mathbf{v} = [x, y, z]$ olyan vektor, amelyre $|\mathbf{v}| = d$ teljesül. Az egyenesek egységnyi hosszúságú irányvektorai a feladatbeli sorrendben:
$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right]$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{9}[1,4,-8]$ és $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}[-1,8,4]$.
A $\mathbf{v}_1\mathbf{v} = 2$, $\mathbf{v}_2\mathbf{v} = 3$, $\mathbf{v}_3\mathbf{v} = 1$ egyenletrendszerből származó

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z = 14 \\ x + 4y - 8z = 27 \\ -x + 8y + 4z = 9 \end{cases}$$

egyenletrendszert csak az $x = -5$, $y = 2$, $z = -3$ számhármas elégíti ki. Ezért egy és csak egy olyan d hosszúságú szakasz létezik, amely kielégíti a feladatbeli feltételeket. Hosszúsága: $\sqrt{38}$.

99. A P pont és az adott egyenes távolsága: 6. Két sík elégíti ki a feltételt. Egyenleteik: $2x - y + 2z + 9 = 0$ és $2x - y + 2z - 27 = 0$.

100. A négy metszéspont: $E(2,-1,5)$, $F(3,-2,3)$, $G(5,5,1)$, $H(4,2,3)$. A hajlásszög koszinusza: $\frac{1}{\sqrt{21}}$.

101. A felbontás lehetséges, mert az egyenesek irányvektorai nem komplanárisak. Az e, f, g, illetve a g egyenesekkel párhuzamos összetevők rendre: $\mathbf{v}_1 = [8, 4, -6]$, $\mathbf{v}_2 = [-1, 10, -4]$, illetve $\mathbf{v}_3 = [3, -8, 2]$.

102. A meghatározandó sík legyen $S: \ Ax + By + Cz + D = 0$. A hasáb éleinek metszéspontjai az S síkon: $M_1\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$, $M_2\left(0, 1, -\frac{B+D}{C}\right)$, $M_3\left(1, 0, -\frac{A+D}{C}\right)$ $(C \neq 0)$. (A $C = 0$ esetben az S sík párhuzamos az élekkel.) Ha a kimetszett háromszög egyenlő oldalú, akkor $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$. Vegyük még figyelembe azt is, hogy az adott P és Q pont rajta van az S síkon. A feladat feltételeit két sík elégíti ki; egyenleteik: $x+y+z+1=0$ és $x+y-z+3=0$.

103. A páronkénti metszésvonalak egyenletrendszerei:

$$e_1: \begin{cases} x = t+3 \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}, \quad e_2: \begin{cases} x = u+1 \\ y = u+3 \\ z = u \end{cases}, \quad e_3: \begin{cases} x = v+4 \\ y = v+4 \\ z = v\,. \end{cases}$$

Ebből leolvasható, hogy a páronkénti metszésvonalak párhuzamosak. A sík általános egyenlete: $Ax + By + Cz + D = 0$. A P ponton átmenő és az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos síkokra teljesülni kell a következőknek: $A+B+C+D = 0$ és $A = B$. Ebből következik, hogy a metsző síkok általános egyenlete:

(1) $$Ax + Ay - (2A+D)z + D = 0\,, \text{ ahol } D \neq 0\,.$$

(A $D = 0$ esetben az $Ax + Ay - 2Az = 0$ egyenletű síkot kapjuk, amely párhuzamos a hasáb éleivel.) Az (1) egyenletű síkok és az e_1, e_2, e_3 egyenesek közös pontjai legyenek rendre M_1, M_2 és M_3. Kapjuk, hogy $\overrightarrow{M_1M_2} = [2, 2, 0]$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \left[\frac{4A}{D}+1, \frac{4A}{D}+3, \frac{4A}{D}+4\right]$, $\overrightarrow{M_2M_3} = \left[\frac{4A}{D}+3, \frac{4A}{D}+1, \frac{4A}{D}+4\right]$, valamint $M_1M_2 = 2\sqrt{2}$ és $M_1M_3 = M_2M_3$. Ezzel állításunkat igazoltuk. Az $M_1M_2M_3$ háromszögek között nincs derékszögű, mert ha lenne, akkor $M_1M_3 = M_2M_3 = 2$-nek teljesülni kellene. Könnyen belátható, hogy ez lehetetlen.

104. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el. Egyetlen ilyen sík létezik. Egyenlete: $y - z + 1 = 0$.

105. Legyen a metsző sík S, az általa lemetszett kisebb tetraéder pedig $AB'C'D$. Az $ABCD$ tetraéder A csúcsához tartozó m és az $AB'C'D'$ tetraéder A csúcsához tartozó m' magasságára $m' = m/\sqrt[3]{2}$ adódik. E feladatnál $m = 2/\sqrt{3}$, és a BCD sík egyenlete: $x+y+z-1=0$. A felező sík egyenlete: $x+y+z+d=0$ alakú; d értéke a $|3+d|/\sqrt{3} = 2/(\sqrt{3}\sqrt[3]{2})$ egyenlet alapján vagy $-3+2/\sqrt[3]{2}$, vagy $-3-2/\sqrt[3]{2}$. De az $\mathcal{S}$ síknak a BCD sík és az A-n átmenő, vele párhuzamos $(x+y+z-3=0)$ egyenletű sík között kell haladnia; tehát $-3 < d < -1$. A felező sík egyenlete: $x+y+z-3+2/\sqrt[3]{2} = 0$.

106. A $t = u = 0$ paraméterekhez tartozó pont az e, illetve az f egyenesen $E(x_1, y_1, z_1)$, illetve $F(x_2, y_2, z_2)$; irányvektoruk $\mathbf{v}_1 = [a_1, b_1, c_1]$, illetve $\mathbf{v}_2 = [a_2, b_2, c_2]$. A két egyenes akkor és csak akkor egysíkú, ha $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\overrightarrow{EF} = 0$. Ez a vegyes szorzat a feladatbeli determinánssal egyenlő.

107. Az e egyenest tartalmazó és az S síkra merőleges sík normálvektora $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$, ahol $\mathbf{v}$ az e egyenes irányvektora, az $\mathbf{u}$ pedig a keresett S' sík normálvektora.

Tekintsük az egyenes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontját, és legyen $P(x, y, z)$ a tér tetszőleges pontja. A P pont akkor és csak akkor van rajta az S' síkon, ha a $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}$ skaláris szorzat zérus.

108. A bizonyítandó tulajdonság csak a négy csúcs egymáshoz viszonyított helyzetétől függ. Ezért a koordináta-rendszert úgy célszerű megválasztani, hogy a számolás lehetőleg kevés fáradsággal járjon és áttekinthető legyen. A tetraéder csúcsai: A, B, C, D. Az ABC háromszöget az xy tengelysíkban, az ábra szerinti elrendezésben vesszük fel. A D csúcs: $D(2d_1, 2d_2, 2d_3)$. Az AB, AC és CB élre merőleges felező síkok egyenlete rendre:
$x = b\,,\quad c_1x + c_2y - c_1^2 - c_2^2 = 0\,,\quad (b - c_1)x - c_2y - b^2 + c_1^2 + c_2^2 = 0\,.$
Ez a három sík egy közös e egyenesen halad át, melynek egyenletrendszere: $e:\ x = b,\ y = \frac{c_1^2+c_2^2-bc_1}{c_2}$. Az AD él felező merőleges síkja: $\mathcal{S}:\ d_1x + d_2y + d_3z - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 0\,.$ Bevezetjük a következő jelöléseket: $L = (c_1^2 + c_2^2 - bc_1)/c_2$ és $K = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$. Az e egyenes és az $\mathcal{S}$ sík metszéspontja: $M = \left(b\,, L\,, \frac{K-d_1b-d_2L}{d_3}\right)$. Kimutatjuk, hogy a DM és AM szakaszok egyenlő hosszúságúak.

$$\overline{AM}^2 = b^2 + L^2 + \left(\frac{K - d_1b - d_2L}{d_3}\right)^2,$$

$$\overline{DM}^2 = (b - 2d_1)^2 + (L - 2d_2)^2 + \left(\frac{K - d_1b - d_2L}{d_3} - 2d_3\right)^2.$$

A műveletek és az összevonás elvégzése után kapjuk, hogy valóban $DM = AM$. Mivel az e egyenes minden pontja egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től, ezért $DM = BM = CM$ is teljesül. Ezekből következik, hogy az M pont rajta van a BD és DC élek felező merőleges síkjain is.

109. 1. megoldás. Az előző feladat megoldásának elején mondottakat itt is alkalmazhatjuk. Legyen az egyik egyenes az x tengely, a másik pedig legyen párhuzamos az xy tengelysíkkal. Tegyük fel, hogy a két egyenes szöge $\alpha\ (\neq 0)$. Legyen $A(a, 0, 0)$ és $B(b, 0, 0)$ az x tengely két, egymástól adott r távolságra levő (különben tetszőleges) pontja. A másik egyenesen pedig a $C(c_1, c_2, k)$ és a $D(d_1, d_2, k)$ pontot tűzzük ki úgy, hogy távolságuk adott s legyen. A két szakaszra $r = |a - b|$ és

(1) $$s^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2$$

áll fenn. Az $ABCD$ tetraéder térfogata:

(2) $$V = \tfrac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \tfrac{1}{6}|a - b||k||c_2 - d_2|\,.$$

A CD egyenes egy irányvektora $\mathbf{v} = [\cos\alpha\,, \sin\alpha\,, 0]$; egyenletrendszere

$$CD:\ x = c_1 + t\cos\alpha,\ y = c_2 + t\sin\alpha,\ z = k\,.$$

A D pont rajta van ezen az egyenesen, ezért $(d_1 - c_1)\sin\alpha = (d_2 - c_2)\cos\alpha$. Ez utóbbiból és az (1) egyenletből kapjuk, hogy $|c_2 - d_2| = s\sin\alpha$. Ezt (2)-be helyettesítve: $V = \frac{1}{6}r|k|s\sin\alpha$. Tehát a térfogat csak az egyenesek egymáshoz viszonyított helyzetétől és a két szakasz hosszától függ, ezért (adott egyenesek esetén) konstans.

2. megoldás. Legyen e és f a két egyenes; AB, illetve CD a rajtuk felvett r, ill. s hosszúságú szakasz (r és s adott pozitív számok). Továbbá legyen $\alpha = (e, f)\angle$. Ismeretes, hogy

$$d(e,f) = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|}{rs\sin\alpha} =$$
$$= \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}|}{rs\sin\alpha} = \frac{6V}{rs\sin\alpha},$$

ahol V az $ABCD$ tetraéder térfogata. Ebből már következik az első megoldás utolsó mondataként megfogalmazott állítás.