8. fejezet

Függvényhatárérték és folytonosság

Valós függvények és szemléltetésük

D 8.1 *n-**változós valós függvény**en ($n \in \mathbf{N}^+$) olyan f függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya ($\operatorname{Dom} f$) az $\mathbf{R}^n$ halmaznak, értékkészlete ($\operatorname{Ran} f$) pedig az $\mathbf{R}$-nek valamely részhalmaza. Ha az n-et nem akarjuk hangsúlyozni, akkor röviden **valós függvény**ről, speciálisan, ha $n = 1$, akkor **egyváltozós valós függvény**ről beszélünk.*

D 8.2 *Az egyváltozós valós $x \mapsto f(x) \quad (x \in \operatorname{Dom} f)$ függvényt síkbeli derékszögű koordi-
náta-rendszerben az $(x, f(x))$ koordinátájú pontok halmazával (az $y = f(x)$ egyenletű geometriai alakzattal) ábrázoljuk, ezt az alakzatot a **függvény grafikonjá**nak nevezzük.
A kétváltozós $(x, y) \mapsto f(x, y) \quad ((x, y) \in \operatorname{Dom} f)$ valós függvény grafikonjának egyenlete: $z = f(x, y)$, amely térbeli derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolható. A grafikonnak az $x = a$ síkkal való metszete az $x = a, \quad z = f(a, y)$ egyenletrendszerű alakzat; x-**nívóvonal**. Ezt az x-nívóvonalat merőlegesen levetítve az yz-síkra, az $x = 0, \quad z = f(a, y)$ egyenletrendszerű görbét kapjuk. Hasonlóan származtathatók az y- és z-nívóvonalak, s ezek merőleges vetületei az xz- illetve xy-síkra.*

D 8.3 *Az egyetlen egyenlettel meghatározott függvényt **explicit alakban megadott**nak, röviden **explicit**nek nevezzük, ha a kiszámítandó függvényérték az egyenlet egyik oldalán magában áll, azaz n-változós függvény esetén $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (x_k \in \mathbf{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n)$ alakú. Minden más esetben a függvényt **implicit alakban megadott**nak, röviden **implicit**nek mondjuk.*

Feladatok

1. Határozzuk meg az $f(-1), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right), f(4), f(6)$ helyettesítési értékeket, ha

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & \text{ha } -1 \le x < 0; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \le x < \pi; \\ \frac{x}{x^2 - 2}, & \text{ha } \pi \le x \le 6. \end{cases}$$

2. Határozzuk meg az $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{8}), f(\sqrt{\log_2 1024})$ helyettesítési értékeket, ha

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3+1, & \text{ha } x \le 2; \\ \frac{1}{x-2}, & \text{ha } 2 < x \le 3; \\ 2x-5, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}$$

3. A 2 oldalú $ABCD$ négyzetet messük el az AC átlóra merőleges e egyenessel. Legyen az A csúcs és az e egyenes távolsága x. Írjuk fel az A csúcsot is tartalmazó lemetszett síkidom területét x függvényeként. Határozzuk meg a területet, ha $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ illetve $x = 2$.

4. Mivel egyenlő $f(2), f(-1), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f(2x), 2f(x), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}, f(x^2), (f(x))^2$, ha $f(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$?

Az **5.** — **9.** feladatokban adjuk meg azt az f függvényt, amely teljesíti a felírt egyenletet:

5. $f(x-2) = \dfrac{1}{x+1}, \quad x \ne -1,$

6. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2+1, \quad x \ne 0,$

7.▹ $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = x, \quad x \ne -1,$

8.▹ $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^4+1}{x^2}, \quad x \ne 0,$

9.▹ $f(x^2) = 1-|x|^3.$

10. Adott az $f(x) = \log_c \dfrac{1-x}{1+x}$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in (-1, 1)$, akkor $f(a)+f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

11.▹ Határozzuk meg az $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ racionális egész függvény (polinom) együtthatóit, ha $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5$.

12.⋆ Határozzuk meg az $f(x) = a+bc^x \quad (c>0)$ függvényben az a, b, c paraméterek értékeit, ha $f(0)=15, f(2)=30, f(4)=90$.

13.• Milyen a érték mellett lesz az $f(x) = \dfrac{x^3+ax^2+2x}{2x-1}$ függvény az $x=\frac{1}{2}$ hely kivételével egyenlő egy másodfokú függvénnyel?

14. Milyen a és b értékeknél lesz az $f(x) = \dfrac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x+1}$ függvény elsőfokú?

Határozzuk meg az alábbi valós függvények értelmezési tartományát:

15. $\dfrac{x^2}{1+x}$,

16. $\sqrt{5-2x}$,

17.• $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x^2-2x+2}}$,

18.• $\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$,

19. $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$,

20. $\dfrac{|x|+10}{|x|-10}$,

21. $\lg(3x-4)$,

22. $\log_a(x^2-4)$,

23. $\log_2 \log_3 \log_4 x$,

24. $\log_a(x+2)+\log_a(x-2)$,

25.• $\lg \cos x$,

26. $\lg \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$,

27.• $\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$,

28.• $\lg \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(3x-8)}$,

29. $\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$,

30. $\dfrac{3}{4-x^2}+\ln(x^3-x)$,

31. $\ln(\sin(\ln x))$,

32. $\ln \dfrac{1}{\ln(1-x)+1}$.

Határozzuk meg az f és $\dfrac{1}{f}$ valós függvények értelmezési tartományát, ha:

33. $f(x)=x^2-x+1$,

34. $f(x)=x+\sqrt{x+2}$,

35. $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}$,

36. $f(x)=5^x-2^{x+1}$,

37. $f(x)=3-2\cos x$,

38. $f(x)=1-\operatorname{ctg} x$.

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

39.• $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos 3x}$,

40.• $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,

41.• $f(x)=\lg(1-2\cos x)$,

42.• $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

Mi az értelmezési tartománya a következő függvényeknek, ha az f függvény értelmezési tartománya a $[0;1]$ intervallum?

43.• $f(x-5)$,

44. $f(4x)$,

45. $f(-x)$,

46. $f(2x+1)$,

47.▷ $f(3x^2)$,

48.• $f(\operatorname{tg} x)$.

Határozzuk meg az alábbi többváltozós valós f függvények értelmezési tartományát, valamint azt a geometriai alakzatot, amely az értelmezési tartományt a síkbeli, illetve térbeli derékszögű koordináta rendszerben ábrázolja:

49.• $\sqrt{1-x^2-y^2}$,

50.▷ $\sqrt{x-\sqrt{y}}$,

51. $\ln(xy)$,

52. $\sqrt{x\sin y}$,

53.▷ $\sqrt{\ln(\sin x\cos y)}$,

54. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$,

55.• $\ln(1-x^2-y^2-z^2)$,

56. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$,

57.• $\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$,

58. $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,

59.▷ $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-|x+y|}}$,

60. $\sqrt{\ln\cos\dfrac{2\pi x}{y}}$,

61.▷ $\sqrt{\sin\pi x\sin\pi y}$,

62.• $\sqrt{z-x^2-y^2}+\sqrt{4-z-x^2-y^2}$,

63.▷ $\ln(x\ln(y-x))$,

64. $\ln(1-\operatorname{sgn}^2 xy)$,

65.▷ $\sqrt{-\sin^2\pi x}+\sqrt{-\sin^2\pi y}$,

66.▷ $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2+c}{x^2-2x+y^2+c}}, \quad c\in\mathbf{R}$,

67. $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - s^2}}, \quad r > s > 0.$

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

68.$^\bullet$ $f(x) = \sqrt{\sin x}$,

69.$^\triangleright$ $f(x) = x^{\frac{1}{\lg x}}$,

70.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\pi \le x \le 0; \\ 2, & \text{ha } 0 < x \le 1; \\ \frac{1}{x-1}, & \text{ha } 1 < x \le 4, \end{cases}$

71. $f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{ha } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0; \\ -2, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$

72.* $\cos 3x \operatorname{sgn} \sin 2x$,

73.$^\triangleright$ $f(x) = x + \sqrt{x^2}$,

74. $f(x) = \cos x + |\cos x|$,

75. $f(x) = |x + 2|x$,

76. $f(x) = 2|x - 2| - |x + 1| + x$.

77.$^\bullet$ Milyen geometriai transzformációkkal származtathatók az $f(x)$ függvény grafikonjából az $f(x+a), f(x)+b, f(kx), lf(x), |f(x)|, f(|x|)$ $\quad (a, b, k, l \in \mathbf{R} - \{0\})$ függvények grafikonjai, ha értelmezve vannak?

78.$^\bullet$ Milyen geometriai transzformációkkal származtatható az $f(x)$ függvény grafikonjából az $lf(k(x+a)) + b$ függvény grafikonja, ha értelmezve van? Ezek segítségével ábrázoljuk a $\sqrt{x}$ függvényből kiindulva a $\dfrac{3}{2}\sqrt{-2x - 4} - 1$ függvényt.

79.$^\bullet$ Ábrázoljuk transzformációval az $\dfrac{1}{x}$ függvényből kiindulva a $\dfrac{2x + 5}{x + 1}$ függvényt.

80.* Ábrázoljuk transzformációval a $\cos x$ függvényből kiindulva a $3\cos x - \sqrt{3}\sin x$ függvényt.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

81.$^\bullet$ $|x^2 - 2x - 3|$,

82.$^\bullet$ $||x| - 1|$,

83.$^\bullet$ $\log_2 |x + 2|$.

Nívóvonalakkal (vagy a függvény grafikonjára jellemző más síkmetszetekkel) szemléltessük az alábbi egyenletekkel megadott $(x, y) \mapsto z$ függvényeket:

84.$^\bullet$ $z = x^2 + y^2$,

85.$^\triangleright$ $z^2 = x^2 + y^2$,

86.$^\triangleright$ $z = y^2 - x^2$,

87. $z = (x + y)^2$,

88.$^\triangleright$ $z = x^2 + y$,

89.$^\triangleright$ $z^2 = x^2 + y^2 - 1$,

90.$^\triangleright$ $z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

Az alábbi $x \mapsto y$ egyváltozós valós függvényeket paraméteres egyenletrendszerrel adtuk meg. Küszöböljük ki a t paramétert!

91. $x = 3t, \quad y = 6t - t^2$,

92.$^\triangleright$ $x = t^2 - 2t + 3, \quad y = t^2 - 2t + 1$,

93. $x = \cos t, \quad y = \sin 2t, \quad t \in [0, \pi]$,

94.$^\bullet$ $x = a\cos t, y = b\sin t \quad (a, b > 0)$,

95. $x = a\sin^3 t, y = a\cos^3 t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

96.$^\bullet$ $x = \operatorname{tg} t, \quad y = \sin 2t + 2\cos 2t$,

97. $x = t^3 + 1, \quad y = t^2$,

98. $x = \dfrac{a}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad y = \dfrac{at}{\sqrt{1 + t^2}}$,

99.* $x = a^t + a^{-t}, \quad y = a^t - a^{-t} \quad (a > 0)$.

Függvény határértéke

D 8.4 (**Heine**) *Az egyváltozós valós f függvény* **határértéke** *az x_0 helyen l, ha f értelmezve van x_0 valamely E környezetében, és minden olyan E-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.*
Az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, *ha f értelmezve van x_0 valamely E környezetében, és minden olyan E-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty)$. Jelölés: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$.*
Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** *a végtelenben l, ha f értelmezve van a ∞ valamely E környezetében, és végtelenhez divergáló minden E-beli $[x_n]$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} f(x) = l$.*
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

D 8.5 (**Cauchy**) *Az egyváltozós valós f függvény* **határértéke** *az x_0 helyen l, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha x benne van x_0-nak δ sugarú környezetében, azaz ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor az f függvény értelmezve van az x helyen és $f(x)$ benne van az l szám ε sugarú teljes környezetében, azaz $|f(x) - l| < \varepsilon$.*
Az egyváltozós valós f függvény az x_0 helyen **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, *ha bármely pozitív (negatív) k számhoz van olyan pozitív δ, hogy ha $0 < |x-x_0| < \delta$, akkor $f(x)$ értelmezve van és $f(x) > k$ $(f(x) < k)$.*
Az egyváltozós valós f függvény **határértéke** *a végtelenben l, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív k szám, hogy ha $x > k$, akkor $f(x)$ értelmezve van és $|f(x) - l| < \varepsilon$.*
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben a határérték, a végtelenben és a mínusz végtelenben végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez divergálás.

T 8.6 *A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója ekvivalens.*

T 8.7

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad (\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0),$$

ha az egyenlőségek jobb oldalán álló határértékek léteznek.

Feladatok

A függvényhatárérték Heine- és Cauchy-féle definíciója (**D 8.4** és **D 8.5**) alapján bizonyítsuk be a következő állításokat:

100.• $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$,

101.• $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$,

102. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{3x+9}=\dfrac{5}{3}$,

103. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=\infty$,

104. $\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty (0<a<1)$,

105.• $\lim\limits_{n\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ nem létezik.

106.• Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_{p-1}x+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_{q-1}x+b_q}=\begin{cases}0, & \text{ha } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p=q;\\ \infty, & \text{ha } p>q \text{ és } \frac{a_0}{b_0}>0;\\ -\infty, & \text{ha } p>q \text{ és } \frac{a_0}{b_0}<0;\end{cases}$$

ahol $p,q\in\mathbf{N}; a_i,b_j\in\mathbf{R}\quad(i=0,1,\dots,p;\quad j=0,1,\dots,q)$ és $a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

107.• Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}=\begin{cases}0, & \text{ha } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p=q;\\ \infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+2, \frac{a_0}{b_0}>0;\\ \infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+1, \frac{a_0}{b_0}<0;\\ -\infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+2, \frac{a_0}{b_0}<0;\\ -\infty, & \text{ha } p>q, p-q=2k+1, \frac{a_0}{b_0}>0;\end{cases}$$

ahol $k,p,q\in\mathbf{N}; a_i,b_j\in\mathbf{R}\quad(i=0,1,\dots,p;\quad j=0,1,\dots,q)$ és $a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

Az x megfelelő hatványával egyszerűsítve határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket:

108.• $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-2}$,

109.• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$,

110.• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+x^2-1}{x^2+x-1}$,

111. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$,

112.• $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$,

113.• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$,

114.▷ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$,

115.⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+2)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket (ha szükséges, akkor az $x-x_0$ tényezővel való egyszerűsítés útján):

116.• $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$,

117.• $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$,

118.• $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$,

119.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3}$,

120.▷ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$,

121.⋆ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}\quad(p,q\in\mathbf{N}^+)$,

122. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$,

123. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$.

Számítsuk ki az alábbi, végtelenbeli függvényhatárértékeket az x alkalmas hatványával való egyszerűsítése útján:

124.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$,

125. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$,

126.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

127.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

Vegyes feladatok

128.* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

129.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket a $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$, illetve a $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\dfrac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ azonosságok alapján:

130.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$,

131.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$,

132.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$,

133.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

134.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

135.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

136.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$,

137.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$,

138.* $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1-x^3}+x)$,

139.* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1})$,

140.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$,

141. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x+c)(x+d)}-x)$,

142.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$,

143.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

Az alábbi feladatokban szereplő kifejezéseket ismert trigonometriai azonosságok alkalmazásával olyan alakra hozhatjuk, hogy a felírt függvényhatárértéket közvetlenül leolvashatjuk. Végezzük el a átalakítást, és írjuk fel a határértéket!

144.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$,

145.$^{\bullet}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$,

146.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$,

147.$^{\triangleright}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}\right|$,

148.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$,

149.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x}$,

150.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$,

151.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$.

Felhasználva a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen, számítsuk ki azokat!

152.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$,

153.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$,

154.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}\quad(\beta\neq 0)$,

155.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$,

156.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$,

157.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$,

158.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

159.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{\sin^2 x}$,

160.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

161. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

162.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$,

163.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$,

164.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$,

165.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (a **7.164** — **7.166** feladatok és a függvényhatárérték Heine-féle definíciója (**D 8.4**) alapján):

166.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$,

167.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$,

168.$^\bullet$ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$,

169.* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}$,

170. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$,

171.$^\triangleright$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x$,

172.$^\triangleright$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

173.$^\bullet$ Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=a>0$ és $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$. (Megjegyezzük, hogy az x_0 a ∞-t vagy $-\infty$-t is jelentheti.)

174.$^\bullet$ Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty\quad \text{és} \lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)=b,$$

akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^b$. (Az előző feladathoz hasonlóan az x_0 itt ∞ vagy $-\infty$ is lehet.)

A **173.** és a **174.** feladatok alapján számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

175.• $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, **176.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}}$,

177.▷ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$, **178.**• $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

179. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$, **180.**• $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$,

181.⋆ $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$, **182.**⋆ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

183.• $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, **184.**• $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$,

185.▷ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$,

186.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$,

187.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$, **188.**▷ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}x^2}$,

189.▷ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos^3 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$, **190.**▷ $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(a\neq k\pi, k\in\mathbf{Z})$,

191. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{k(x)}\neq 0\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)},$$

$(\alpha\in\mathbf{R})$ (ahol x_0 jelentheti a ∞-t vagy a $-\infty$-t is).

Egyoldali függvényhatárérték

D 8.8 *A v valós szám δ hosszúságú* **bal oldali környezetén** *a $(v-\delta;v)$, δ hosszúságú* **jobb oldali környezetén** *a $(v;v+\delta)$ intervallumot értjük.*

D 8.9 *Az egyváltozós valós f függvény* **bal oldali határértéke** *az x_0 helyen b, ha f értelmezve van x_0 valamely B bal oldali környezetében és minden olyan B-beli $[x_n]$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$; vagy, ami ezzel ekvivalens, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha x benne van x_0-nak δ hosszúságú bal oldali környezetében, azaz,ha $x_0-\delta<x<x_0$, akkor f értelmezve van az x helyen, és $f(x)$ benne van b-nek ε sugarú teljes környezetében, azaz $|f(x)-b|<\varepsilon$. (Jelölés: $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=b$; ha $x_0=0$, akkor egyszerűen $\lim_{x\to -0}f(x)=b$.) Hasonlóan definiálható az x_0 helyen a* **jobb oldali határérték** *($\lim_{x\to x_0+0}f(x)$, $\lim_{x\to +0}f(x)$), a* **balról (jobbról) végtelenhez divergálás**.

T 8.10 *Egyváltozós valós függvénynek valamely helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha ezen a helyen bal oldali és jobb oldali határértéke is létezik, és a két egyoldali határérték egyenlő; ebben az esetben a határérték az egyoldali határértékekkel egyenlő.*

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyváltozós valós függvények bal- és jobb oldali határértékét a megadott x_0 helyen:

192. $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{ha } x \le 1; \\ 3x-5, & \text{ha } 1 < x; \end{cases} \quad x_0 = 1,$

193.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}; \quad x_0 = 1,$

194.$^\bullet$ $f(x) = 3 + \dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}; \quad x_0 = 1,$

195.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}; \quad x_0 = 0,$

196.$^\triangleright$ $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}; \quad x_0 = 0,$

197. $f(x) = \dfrac{5}{(x-2)^3}; \quad x_0 = 2,$

198. $f(x) = \dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}; x_0 = 1.$

Függvények folytonossága

D 8.11 *Az egyváltozós valós f függvényt* **folytonos***nak nevezzük az x_0 helyen (pontban), ha f értelmezve van az x_0 helyen, van határértéke az x_0 helyen és $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Hasonlóan értelmezhető az f függvény bal oldali, illetve jobb oldali folytonossága. (A definícióban határérték helyett bal oldali, illetve jobb oldali határértéket veszünk.)*

T 8.12 *Adott pontban folytonos függvények összege, különbsége és szorzata is folytonos ebben a pontban; két ilyen függvény hányadosa is folytonos, ha az osztó nem zérus az adott pontban.*

D 8.13 *Ha az f függvény az x_0 helyen (pontban) folytonos, akkor azt is szokás mondani, hogy x_0 az f* **folytonossági helye***. Ha viszont az f függvény az x_0 helyen nem folytonos, de az x_0 valamely környezetének minden pontjában folytonos, akkor az x_0-t f* **szakadási helyé***nek nevezzük.*
A szakadási helyek típusai:
x_0 **hézagpont***, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ létezik, de az x_0 helyen a függvény nincs értelmezve;*
az x_0 pontban **megszüntethető szakadása** *van f-nek, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ létezik, $f(x_0)$ is létezik, de $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$;*
az x_0 pontban **lényeges szingularitása** *van, ha $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nem létezik. A lényeges szingularitás fontos speciális esete a pólus: Akkor mondjuk, hogy az x_0 helyen* **pólus***a van a függvénynek, ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$.*

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények. Ha a függvényeknek szakadási helyeik vannak, akkor állapítsuk meg azok típusát:

199.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$,

200. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$,

201. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+7}$,

202. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$,

203.$^\bullet$ $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$,

204. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$,

205.$^\bullet$ $f(x) = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$,

206. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \le 1; \\ \frac{2}{x-1}, & \text{ha } 1 < x, \end{cases}$

207.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{5x^2-3x}{2x}$,

208. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

209.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$,

210.$^\bullet$ $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$,

211.$^\triangleright$ $f(x) = \operatorname{Ent} 2x - 2x + 2$,

212.$^\bullet$ $\operatorname{sgn} |x^4 + x^2|$,

213.$^\triangleright$ $\operatorname{sgn} |\sin x|$,

214. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } x \le 0; \\ (1-x)^2, & \text{ha } 0 < x \le 2; \\ 3-x, & \text{ha } 2 < 2, \end{cases}$

215.$^\triangleright$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{ha } x \ne 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

216.* $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}; \\ 4-2x, & \text{ha } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \end{cases}$

217.$^\triangleright$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{ha } x \ne 2k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$

Határozzuk meg — ha lehetséges — az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek:

218.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \ne 0; \\ a, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

219. $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{ha } x \ne -1; \\ a, & \text{ha } x = -1, \end{cases}$

220.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & \text{ha } 0 < x; \\ -x, & \text{ha } x \le 0, \end{cases}$

221. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \le 0; \\ a(x-1), & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$

222.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{ha } x \le 0; \\ ax+b, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \le x, \end{cases}$

223. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \le 1; \\ x^2+ax+b, & \text{ha } 1 < |x|, \end{cases}$

224.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{ha } |x| \ne 1; \\ a, & \text{ha } x = -1; \\ b, & \text{ha } x = 1, \end{cases}$

225.$^\bullet$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], x \ne 0, x \ne \pi; \\ a, & \text{ha } x = 0; \\ b, & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyeiken folytonosak-e balról vagy jobbról:

226.$^\bullet$ $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ha } |x|\le 1;\\ 0, & \text{ha } |x|>1,\end{cases}$

227.$^\bullet$ $f(x)=\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x-1}, & \text{ha } x\ne 1;\\ a(\in \mathbf{R}), & \text{ha } x=1,\end{cases}$

228. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|}+x, & \text{ha } x\ne 0;\\ 1, & \text{ha } x=0,\end{cases}$

229.* $(-1)^{\mathrm{Ent}(x^2-1)}$,

230.* $f(x)=\ln x-\mathrm{Ent}(\ln x)$,

231.* $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{ha } x\le 0;\\ 2-\frac{2}{2x-1}-\mathrm{Ent}\left(2-\frac{2}{2x-1}\right), & \text{ha } 0<x.\end{cases}$

Függvénygörbe aszimptotája

D 8.14 *Az e egyenest a végtelenbe nyúló g görbe* **aszimptotájá***nak nevezzük, ha a g görbén végtelenbe távolodó pontnak az e egyenestől való távolsága 0-hoz konvergál. Az f egyváltozós valós függvény görbéjének (grafikonjának) aszimptotáját szokás egyszerűen az f* **függvény aszimptotá***jának nevezni.*

T 8.15 *Az $y=f(x)$ egyenletű görbének az y tengellyel párhuzamos aszimptotája, azaz* **függőleges aszimptotája** *csak olyan x_0 helyen lehet, ahol az f függvény legalább egy oldalról végtelenhez vagy mínusz végtelenhez divergál, és ez esetben az $x=x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.*

T 8.16 *Az $y=f(x)$ egyenletű görbének akkor és csak akkor van az y tengellyel nem párhuzamos, azaz* **ferde aszimptotája**, *ha az $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ és $c=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$ vagy pedig $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ és $c=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$ határértékek léteznek. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az $y=mx+c$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota ∞-ben, illetve $-\infty$-ben. (Speciálisan, ha $m=0$, akkor* **vízszintes aszimptotá***ról beszélünk.)*

Feladatok

Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Vizsgáljuk meg folytonosságukat, és határozzuk meg aszimptotáik egyenletét:

232.$^\bullet$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

233. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$,

234.$^\bullet$ $f(x)=\sqrt{x^4-1}$,

235.$^\bullet$ $f(x)=\dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$,

236.$^\bullet$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$,

237.$^\bullet$ $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$,

238.$^\triangleright$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$,

239.$^\bullet$ $f(x)=3\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-1}$,

240. $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)^2}$,

241. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}$,

242.* $f(x) = \dfrac{x^4 - 2a^2x^2 + a^4}{x^3 - 3bx^2 + 2b^2x} \quad (a, b \neq 0)$,

243.$^\triangleright$ $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$

244.* $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{Ent} x}{\operatorname{Ent} x}; x_0 = n(n \in \mathbf{Z})$,

245.* $f(x) = \dfrac{\operatorname{Ent} x^3}{x^2 + 1}$,

246.$^\bullet$ Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \cdots + a_{p-1}x + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + b_2x^{q-2} + \cdots + b_{q-1}x + b_q}$$

$(a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad p \in \mathbf{N}, \quad q \in \mathbf{N}^+)$ függvénynek a $p \leq q+1$ feltétel mellett van ferde aszimptotája, s ebben az esetben a ferde aszimptota egyenlete:

$$y = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}x + \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0^2}, & \text{ha } p = q + 1; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{ha } p = q; \\ 0, & \text{ha } p < q. \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi implicit alakban megadott $x \mapsto y = y(x)$ függvények ferde aszimptotáinak egyenletét:

247.* $(2x + y)^2(x + y) = x$,

248.* $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$,

249.* $(x^2 - y^2)^2 = 2x \quad (x \geq 0)$,

250.$^\triangleright$ $x^3 + y^3 = 3x^2$,

251.* $x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1)$,

252.* $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$.

Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvények

D 8.17 *A valós (komplex) értékű f függvényt* **korlátos***nak nevezzük, ha van olyan v valós szám, hogy $|f(P)| \leq v$ a $\operatorname{Dom} f$ minden P elemére érvényes. Ha ez a feltétel csak az értelmezési tartomány valamely H részhalmazának P pontjaira teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f a H* **halmazon korlátos**. *Megfelelő módon definiálható valós függvény alulról illetve felülről korlátossága.*

D 8.18 *Az M_1 metrikus térből az M_2 metrikus térbe vivő függvényt a $H(\subseteq M_1)$* **halmazon folytonos***nak nevezzük, ha f a H minden belső pontjában folytonos, továbbá a H-nak minden olyan P határpontjára, amely H-hoz tartozik, teljesül az, hogy ha $[P_n]$ olyan H-beli sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P)$.*
Ez azt jelenti, hogy egyváltozós valós függvény valamely $[a, b]$ zárt intervallumon akkor és csak akkor folytonos, ha az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában folytonos, a-ban jobb oldalról, b-ben pedig bal oldalról folytonos.

T 8.19 *Korlátos zárt halmazon folytonos valós függvény korlátos is ezen a halmazon.*

T 8.20 *Legyen H az $\mathbf{R}^k$ metrikus tér korlátos zárt részhalmaza. Ha f a H halmazon folytonos valós függvény akkor vannak olyan $P_1, P_2 \in H$, hogy $f(P_1) = \inf\{f(P); P \in H\}$, $f(P_2) = \sup\{f(P_0); P \in H\}$, azaz az f a H-n felvett értékei halmazának infimumát és szuprémumát is felveszi a H bizonyos pontjaiban.*

T 8.21 *Legyen az egyváltozós valós f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon. Legyenek továbbá $x_1, x_2 \in [a, b]$ tetszőleges olyan pontok, amelyekre $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$ $(c \in \mathbf{R})$, akkor van olyan $x_0 \in [x_1, x_2]$ (vagy $x_0 \in [x_2, x_1]$), hogy $f(x_0) = c$.*

T 8.22 (**Bolzano**) *Ha az egyváltozós valós f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos és az intervallum két végpontjában ellentétes előjelű, akkor az intervallum belsejében van zérushelye.*

Feladatok

253.$^\bullet$ Van-e valós megoldása a $\sin x - x + 1 = 0$ egyenletnek?

254.$^\triangleright$ Van-e megoldása az $x^5 - 18x + 2 = 0$ egyenletnek a $[-1, 1]$ intervallumban?

255.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy az $a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$ $(a_i \in \mathbf{R},\quad i = 0, 1, \ldots, 2n + 1,\quad a_0 \neq 0)$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

256.$^\bullet$ Felveszi-e az $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $\frac{7}{3}$ értéket a $[-2, 2]$ intervallumban?

257.$^\triangleright$ Legyen f a $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos függvény és $\operatorname{Ran} f \subseteq [0, 1]$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c \in [0, 1]$, hogy $f(c) = c$.

258.* Feszítsünk ki egy rugalmas szalagot a $[0; 1]$ zárt intervallumon úgy, hogy a szalag kezdőpontja 0, a végpontja 1 legyen. Mozgassuk a szalag két végét egyszerre úgy, hogy egy adott időpillanatban a kezdőpontja a, a végpontja pedig b legyen $(0 \leq a < b \leq 1)$. Mutassuk meg, hogy van a szalagnak olyan pontja, amely helyben marad.

259.* Legyen f a $[0, 1]$ zárt intervallumon folytonos függvény, és legyen $f(0) = f(1) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $d \in (0, 1]$ valós számhoz megadható a függvény grafikonjának olyan húrja, amely d hosszúságú.

260.$^\triangleright$ Bizonyítsuk be, hogy egy elhanyagolható vastagságú, körgyűrű alakú elektromos vezetőn van két olyan pont, amely ugyanolyan hőmérsékletű.