Simonovits András: BME Matematikai Intézet

Matematikai közgazdaságtani modellek

MTA, Közgazdaságtudományi Intézet
Budapest, Budaörsi út 45, 1112
e-mail: simonov@econ.core.hu
2009. február 7.

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó

Ebben az előadássorozatban a matematikai közgazdaságtani modellek világába vezetem be a hallgatókat. Feltételezem, hogy a hallgatók már tanultak mikro- és makroökonómiát, és alapos matematikai ismeretekkel rendelkeznek.

Száz évvel ezelőtt a közgazdaságtan zöme nélkülözte a matematikai modelleket, azóta viszont egyre nő a matematikai modellek szerepe a közgazdaságtanban. Ez a folyamat egyrészt szabatosabbá és számszerűsíthetővé teszi a közgazdaságtant, másrészt öncélú matematikai ujjgyakorlattá silányíthatja azt. Remélem, az előadandó modellek valóban segítenek a valóság jobb megértésében, és előkészítik a hallgatókat felsőbb éves tanulmányaikra.

Azért, hogy az előadássorozat zárt legyen, részletesebben tárgyalok olyan matematikai területeket, amelyek a közgazdaságtanban alapvető fontosságúak, de a jelenlegi matematikai oktatásban már vagy még háttérbe szorulnak, például a pozitív elemű mátrixokat és a variációszámítást.

A jegyzet számos példát és feladatot tartalmaz, ez utóbbiak megoldása a jegyzet végén található. Kérem a hallgatókat, hogy először próbálják meg a feladatokat saját maguk megoldani, és csak kellő mennyiségű próbálkozás után forduljanak a feladatmegoldásokhoz.

Budapest, 2009. február.

1. Döntés bizonytalanság mellett

Mikroökonómiában alapvető szerepet játszik a preferenciarendezés és az őt reprezentáló hasznosságfüggvény. Először röviden felelevenítjük e fogalmakat, majd segítségükkel modellezzük, hogyan dönt egy racionális egyén bizonytalanság mellett.

1.1. Preferenciarendezés és hasznosságfüggvény

Az egyszerűség kedvéért legyen (X,Y) két termék fogyasztási vektora, ahol X, Y nemnegatív valós számok és legyen $P > 0$ és $Q > 0$ a két termék egységára, $I > 0$ a fogyasztó jövedelme. Ekkor a fogyasztó *költségvetési feltétele* $PX + QY = I$. Kérdés: milyen kombinációt választ a fogyasztó, és hogyan változik a választása az árak és a jövedelem változásával?

1870-től kezdve a választ a matematikus-közgazdászok egy $U : \mathbf{R}^2 \to R$ egy *kardnális hasznosságfüggvény* segítségével adták meg, amelyet a fogyasztó a költségvetési feltétel mellett maximalizál. A közgazdászokat sokáig nagyon zavarta, hogy milyen alapon tehetik föl egy ún. *kardinális* hasznosságfüggvény létezését.

A 20. század elején Pareto belátta, hogy elegendő a közömbösségi görbék létezését megkövetelni: azaz olyan (X,Y) párok halmazát vizsgálni, amelyekre a hasznosságfüggvény értéke állandó: $U(X,Y) = c$, *ordinális megközelítés*, sőt az 1950-es években elterjedt a *preferenciarendezések* vizsgálata, ahol csupán áruhalmazokat kell összehasonlítani. Föltesszük, hogy a fogyasztó számára vagy az 1. csomag *legalább olyan előnyös*, mint a 2. csomag, jele: $(X_1,Y_1) \succeq (X_2,Y_2)$, vagy fordítva. Két áruvektor *közömbös* a rendezésben, ha mindkét irányú rendezés teljesül. Képletben: $(X_1,Y_1) \sim (X_2,Y_2)$, ha $(X_1,Y_1) \succeq (X_2,Y_2)$ és $(X_2,Y_2) \succeq (X_1,Y_1)$. Ugyanakkor kiderült (Debreu, 1954), hogy a folytonos preferenciarendezések *reprezentálhatók* hasznosságfüggvényekkel, azaz van olyan $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $(X_1,Y_1) \succeq (X_2,Y_2)$ pontosan akkor teljesül, ha $U(X_1,Y_1) \geq U(X_2,Y_2)$. A kör bezárult. Most a tételt a legegyszerűbb alakjában mondjuk ki és bizonyítjuk. De ehhez segítségül hívjuk a rendezés *szigorú monotonitását* is, ami azt jelenti, hogy ha $(X_1,Y_1) \geq (X_2,Y_2)$, de $(X_1,Y_1) \neq (X_2,Y_2)$, akkor $(X_1,Y_1) \succeq (X_2,Y_2)$.

1.1. tétel. *(Debreu, 1954.) Tegyük föl, hogy a preferenciarendezés teljes, reflexív, tranzitív, folytonos és szigorúan monoton. Ekkor létezik egy folytonos hasznosságfüggvény, amely reprezentálja az adott rendezést.*

Bizonyításvázlat. Feleltessük meg az (X,Y) párnak azt a valós $U(X,Y)$ számot, amelyre $(X,Y) \sim U(X,Y)(1, 1)$. (Feltevéseink szerint pontosan egy ilyen szám van.) A reprezentativitás a következőképpen bizonyítható: Tegyük föl, hogy $(X_1,Y_1) \succeq (X_2,Y_2)$. Ekkor $(X_1,Y_1) \sim U(X_1,Y_1)(1,\ 1)$ és $(X_2,Y_2) \sim U(X_2,Y_2)(1,\ 1)$, s a tranzitivitás és a monotonitás miatt $U(X_1,Y_1) \geq U(X_2,Y_2)$, stb. ∎

1.1. példa. (Lexikografikus rendezés.) Tegyük föl, hogy a fogyasztó az (X,Y) vektorokat a következőképpen rendezi: $(X_1,Y_1) \succeq (X_2,Y_2)$ pontosan akkor, ha vagy $X_1 \geq X_2$ vagy $X_1 = X_2$ és $Y_1 \geq Y_2$. Gondoljuk meg, hogy ez a rendezés nem reprezentálható semmilyen folytonos hasznosságfüggvénnyel sem.

1.2. A Neumann–Morgenstern féle hasznosságfüggvény

Föltesszük, hogy adott egy preferenciarendezés, amely nem csak biztos díjakon, hanem bizonytalan kimenetelű lottók halmazán (jele L) is értelmezve van. A fogyasztó p valószínűséggel x-et, $1-p$ valószínűséggel y-t kap, szimbolikusan: $p\mathrm{o}x+(1-p)\mathrm{o}y$. A díj lehet pénz, áru sőt, lottó. Föltesszük, hogy 1) az 1 valószínűségű nyeremény azonosítható a biztossal, 2) a díjak felsorolási rendje közömbös, és 3) a fogyasztó számára közömbös a valószínűségek „csomagolása”, azaz

$$q\mathrm{o}(p\mathrm{o}x + (1-p)\mathrm{o}y) + (1-q)\mathrm{o}y \sim (qp)\mathrm{o}x + (1-qp)\mathrm{o}y.$$

A többesélyes lottó visszavezethető a kétesélyes lottóra. Lássuk pl. a háromesélyes lottó visszavezetését:

$$p\mathrm{o}x + q\mathrm{o}y + (1-p-q)\mathrm{o}z \sim (p+q)\mathrm{o}\left(\frac{p}{p+q}\mathrm{o}x + \frac{q}{p+q}\mathrm{o}y\right) + (1-p-q)\mathrm{o}z.$$

A közgazdaságtanban alapvető szerepet játszik a várt hasznosságon alapuló Neumann–Morgenstern (1944/1947)-féle hasznosság-függvény, amely egy preferencia-rendezést speciálisan reprezentál:

Célok: (i) Monotonitás a preferencia-rendezés és az u hasznosságfüggvény között:

$$\text{Ha } x \succeq y, \qquad \text{akkor} \qquad u(x) \geq u(y).$$

(ii) (Várható hasznosság). A kombináció hasznossága a hasznosságok kombinációja:

$$u(p\mathrm{o}x + (1-p)\mathrm{o}y) = pu(x) + (1-p)u(y).$$

Kiegészítő axiómákra lesz szükségünk.

C1. Azoknak a p valószínűségeknek a halmaza, melyekre $p\mathrm{o}x + (1-p)\mathrm{o}y \succeq z$, zárt. Ugyanaz $p\mathrm{o}x + (1-p)\mathrm{o}y \preceq z$-re.

C2. Ha két díj között a fogyasztó közömbös, akkor egy harmadik díj azonos valószínűségű hozzákeverése után is fönnmarad a közömbösség:

$$\text{Ha } x \sim y, \qquad \text{akkor} \qquad p\mathrm{o}x + (1-p)\mathrm{o}z \sim p\mathrm{o}y + (1-p)\mathrm{o}z.$$

C3. L-ben van legjobb és legrosszabb díj: b és w. Azaz minden $x \in L$-re $b \succeq x \succeq w$.

1.2. tétel. *Az axiómák teljesülése esetén létezik és lényegében egyértelműen meghatározott az NM-hasznosságfüggvény.*

Bizonyítás-vázlat. Normálás: $u(w) = 0$ és $u(b) = 1$. Konstrukció: Legyen $b \succeq z \succeq w$, ekkor C1 szerint létezik egy pontosan olyan p_z valószínűség, amelyre $p_z \mathrm{o} b + (1 - p_z) \mathrm{o} w \sim z$. Ekkor (ii) folytán $u(z) = p_z u(b) + (1 - p_z)u(w) = p_z$. Ellenőrzés (számolással): kielégíti a várható hasznosság feltételét és monoton. ∎

Megjegyzés. A bizonyítás nagyon hasonlít az 1.1. tétel bizonyításához, azonban a jelen tétel 1947-ből származik, Debreu-é pedig 1954-ből!

1.3. Kockázatkedvelés vagy kockázatkerülés

Az NM-féle hasznosságfüggvény nem ekvivalens a pénzben kifejezett nyereséggel, hiszen nem a várható pénzre, hanem a várható hasznosságra vonatkozik az additivitás.

1.2. példa. A lottójátékos 2009-ben hetente 200 Ft-os biztos kiadással jut hozzá egy olyan szelvényhez, amelynek várható nyereményértéke kb. 60 Ft. Viszont a kis valószínűségű nyereség olyan nagy (több száz millió, esetleg több milliárd Ft), hogy tízmilliós országunkban hetente több millió lottószelvényt vásárolnak meg.

1.1. feladat. Racionális lenne-e az a személy, aki egy alkalommal kb. 44 millió lottószelvényt venne, hogy biztos öttalálatosa legyen?

Definíció. Egy *személyt kockázatkedvelőnek/kockázatkerülőnek* nevezünk, ha elutasít/előnybe részesít egy biztos pénzdíjat egy olyan lottóval szemben, amelynek a matematikai várható értéke azonos vele:

$$pu(x) + (1 - p)u(y) > u(p\mathrm{o}x + (1 - p)\mathrm{o}y) : \qquad \textit{kockázatkedvelő},$$

$$pu(x) + (1 - p)u(y) < u(p\mathrm{o}x + (1 - p)\mathrm{o}y) : \qquad \textit{kockázatkerülő}.$$

A továbbiakban kockázatkerülő egyénekkel foglalkozunk, hiszen a normális esetekben ez fontosabb, mint a másik.

1.3. tétel. *Egy döntéshozó akkor és csak akkor kockázatkerülő, ha az u hasznosságfüggvény szigorúan konkáv ($u'' < 0$).*

Bizonyítás. Szigorúan konkáv u függvények egyik tulajdonsága (a Jensen-egyenlőtlenség) szerint két különböző $x \neq y$ pontot összekötő húr végig a függvénygörbe alatt helyezkedik el: tetszőleges $0 < p < 1$ esetén

$$pu(x) + (1 - p)u(y) < u(px + (1 - p)y).$$

∎

1.3. példa. (Daniel Bernoulli szentpétervári paradoxona 1735-ből.) Fej-vagy-írást játszunk addig, amíg először nem nyerünk. Az n-edik lépésben 2^n a tét. A várható pénznyereség 1, de a várható tőkeigény végtelen. Ha a hasznosságfüggvény konkáv és korlátos, akkor a játék értéke véges.

Definíció. (Arrow (1965/1970).) Ha w a fogyasztó gazdagsága, akkor a *kockázatkerülés abszolút* és *relatív együtthatója* rendre

$$a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \qquad \text{és} \qquad r(w) = wa(w).$$

A következőkben bebizonyítjuk, hogy $a(w)$ valóban az abszolút kockázattal kapcsolatos, (angolul: Absolute Risk Aversion, rövidítése ARA). Tegyük föl, hogy az u hasznosságfüggvényű w gazdagságú fogyasztó egy p valószínűségű x nyereményért a $q = 1 - p$ valószínűségű $y(x)$ maximális veszteséget hajlandó elviselni.

1.4. tétel. *a) A veszteség/nyeremény arány a nulla határértéknél egyenlő a nyerési-valószínűség/vesztési-valószínűség arányával:*

$$y'(0) = \frac{p}{q}.$$

b) Adott nyerési-valószínűség esetén a maximális veszteség második deriváltja arányos a Pratt-féle abszolút kockázatkerülési együtthatóval:

$$y''(0) = \frac{p}{q^2}a(w).$$

Bizonyítás. a) A közömbösségi feltétel szerint

$$pu(w + x) + qu(w - y(x)) = u(w).$$

Differenciáljuk az azonosságot x szerint:

$$pu'(w + x) - qu'(w - y(x))y'(x) = 0.$$

Lokálisan vizsgálódva ($x = 0$) adódik az első arányosság. b) Mégegyszer differenciáljuk az azonosságot x szerint és $x = 0$-t véve:

$$pu''(w) + qu''(w)y'(0)^2 - qu'(w)y''(0) = 0.$$

Behelyettesítve az $y'(0)$-ra kapott képletet, adódik

$$y''(0) = -\frac{pu''(w)}{q^2u'(w)}.$$

∎

1.4. példa. Állandó abszolút kockázatkerülési együttható (CARA): $u(w) = Ae^{-\sigma w}$.

1.5. példa. Állandó relatív kockázatkerülési együttható (CRRA): $u(w) = A\sigma^{-1}w^{\sigma}$, ha $\sigma < 1$, $\sigma \neq 0$ és $u(w) = A\log w$, ha $\sigma = 0$. (Ha $u(w)$-t nem szoroznánk be σ^{-1}-gyel (vagy σ-val), akkor $\sigma < 0$-nál $u(w)$ csökkenő fügvény volna!)

Megjegyzés. Ha nincs kockázatvállalás ($\sigma = r(w) = -\infty$), akkor megszűnik az additivitás, eltűnnek a valószínűségek és $u(x,y) = \min(x,y)$.

1.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy CARA-nál $a(w) = \sigma$ és CRRA-nál $r(w) = 1-\sigma$.

1.4. Biztosítás

Talán a biztosítás a legegyszerűbb példa a kockázatkerülésre. Biztosítási modellünkben egy ügyfél eredeti jövedelme w, amelyet a p valószínűségű baleset $w-c<w$-re csökkent. Mivel az ügyfél hasznosságfüggvénye $W(w,w-c)=pU(w-c)+qU(w)$, $q=1-p$ és U *konkáv*, az ügyfélnek érdemes a balesetmentes jövedelmét csökkentenie, hogy baleset esetén megmaradó jövedelmét növelje. A biztosító közömbös a kockázattal szemben, számára csak az fontos, hogy ne veszítsen az üzleten (tökéletes verseny és nulla költség). A b biztosítási díj ellenében a balesetet szenvedő ügyfél k összegű kártérítést kap, így a biztosított fél feltételes jövedelme $w-b$ és $w-c-b+k$. Az ügyfél optimalizál: olyan k-t választ, amelynél $W(w-b,w-c-b+k)$ minimális. Biztosító: $b=pk$.

*Teljes biztosítás*ról beszélünk, ha $k=c$.

1.5. tétel. *Teljes biztosításnál a biztosított biztosan megkapja a biztosításnélküli jövedelmének várható értékét, jóléti vesztesége minimális.*

Bizonyítás. A Jensen-egyenlőtlenség értelmében $W(w-b,w-c+qk)=pU(w-c+qk)+qU(w-pk)>U[p(w-c+qk)+q(w-pk)]=U(w-pc)$, ahol a minimumhely $w-c+qk=w-pk$, azaz $k^{\mathrm{o}}=c$. ∎

Megjegyzések. 1. A valóságban a biztosításnak van költsége (d), sőt π normálprofitot is kell hoznia, ezért az általános esetben $b=pk$ helyett $b=(pk+d)(1+\pi)$ áll.

2. Nagyon gazdag embernek vagy intézménynek (államnak) nem érdemes biztosítást kötnie viszonylag kis károkra (például a magyar államnak a 2000 körül leégett Sportcsarnokra, vagy egy megyei Volánnak a járműveire), mert a biztosító haszna nagyobb lenne, mint a tulajdonos kockázati vesztesége.

3. A biztosítás ténye és a kártérítés összege növelheti a baleset valószínűségét (p növekvő függvénye k-nak), ezért a probléma bonyolultabb: célszerű lehet csak részleges biztosítást nyújtani, $k<c$. Ezzel a kérdéssel az információ-gazdaságtan foglalkozik.

1.3. feladat. Egy ember vagyona w, ebből autójának értéke $c<w$. Legyen p annak az eseménynek a valószínűsége, hogy autóját egy év alatt ellopják. a) Mekkora lehet a maximális biztosítási díj, amit a biztosított hajlandó kifizetni (i) egy teljes, illetve (ii) egy $c-k$-önrészesedésű biztosításért, ahol csak $k<c$ a kártérítés? b) Számolja ki az (i) feladatot, ha $U(w)=\sqrt{w}$, $w=1{,}5$ mFt, $c=k=1$ mFt és $p=0{,}03$, ill. a (ii) feladatot, ha $k=0{,}9$ mFt!

2. Játékelméleti bevezető

Ebben a fejezetben néhány bevezető példát mutatunk be, amelyen szemléltethetők a nemkooperatív játékelmélet alapvető kérdései (Mérő, 1996). Részletesebb tárgyalást ad Gibbons (1992). Az itt adott meghatározások szükségképpen vázlatosak. Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben két játékosra szorítkozunk. Legyen S_1 és S_2 két véges halmaz: a két játékos *stratégiá*inak halmaza; melyek általános elemei s_1 és s_2: a két játékos stratégiái. (Döntés helyett stratégiát írunk, mert többlépéses döntéseket is megengedünk.) A két játékos egymástól függetlenül dönt (nem kooperál), s hasznuk (hasznosságuk, profitjuk, nyereségük, nyereményük, kifizetésük) rendre $u_1(s_1,s_2)$ és $u_2(s_1,s_2)$ valós szám. Mindkét játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de a függvényérték, s így a maximum függ a másik játékos stratégiájától is. Föltesszük, hogy mindkét játékos mindent tud a másik lehetőségeiről (S_j) és érdekeiről (u_j), csupán annak konkrét s_j stratégiáját nem ismeri előre. Neumann–Morgenstern (1944) foglalkozott először rendszeresen ilyen játékelméleti feladatokkal, bár Neumann első játékelméleti cikke 1928-ból származik.

2.1. példa. A fogolydilemma (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő” enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. A nyereménypár az 1. egyedüli közreműködése esetén (3, –3), a 2.-é esetén (–3, 3). Ha mindkettő tagad (kooperál a másikkal), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, nyereménypár: (2, 2). Ha mindkettő „köp”, akkor mindketten börtönbe kerülnek, de mindketten jutalmat is kapnak, nyereménypár: (–2, –2).

Érdemes a fenti adatokat az ún. *kifizetési mátrix*ba rendezni:

2.1. táblázat. *Fogolydilemma*

2. bűnöző 1. bűnöző	Köp	Tagad
Köp	(–2, –2)	(3, –3)
Tagad	(–3, 3)	(2, 2)

Mi lesz a játék egyensúlya, ahonnan egyik félnek sem érdeke elmozdulnia? Erre általában nehéz válaszolni, de ebben a speciális esetben nincs probléma. Valóban, akármit lép a másik játékos, az egyik játékos mindig jobban jár, ha köp, mint ha tagad: a köpés *dominálja* a tagadást: pl. az 1. játékos szempontjából, ha 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3 < -2$); ha 2. tagad, az 1. tagadása ismét rosszabb a köpésénél ($2 < 3$). Az már más kérdés, hogy a (köp, köp) egyensúly kettőjüknek együttesen nem optimális, hiszen mindkét játékos veszít ahhoz képest, mint ha mindkettő tagadna. Külön érdekesség, hogy ez ellentmond a smith-i láthatatlan kéznek, a piac decentralizált optimumának.

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői általában szeretik ilyen frivol jellegű példákon megfogalmazni a problémákat, de azért vannak fontos alkalmazások is.

A fogolydilama esetében gondoljunk az OPEC-re, s az egyszerűség kedvéért legyen az egyik játékos Szaud-Arábia, a másik pedig a többi tagország. Két stratégiapár van: együttműködnek a termelés visszafogásában (s akkor magas olajárat érhetnek el) vagy sem. Az igazi OPEC-optimum az lenne, ha mindkét fél visszafogná a termelését. Mivel nem bíznak meg egymásban, mindkét fél abban reménykedik, hogy a másik visszafogja a termelését és ő pedig kihasználja az így adódó kedvező lehetőségeket. A valódi helyzet jóval bonyolultabb, de az elmélet mégis ad valamilyen magyarázatot a tényleges folyamatokra.

Következő példánkban egyik játékosnak sincs domináns stratégiája, ezért most nehezebb egyensúlyt találni.

2.2. példa. A nemek harca. A Fiú és a Lány szeret együtt lenni, de a Fiú inkább meccsre menne, a Lány inkább moziba. A kifizetési mátrixpár most legyen a következő:

2.2. táblázat. *Nemek harca*

Lány Fiú	meccs	mozi
meccs	(3, 2)	(1, 1)
mozi	(1, 1)	(2, 3)

Valóban, a Fiú számára „a meccs” stratégia jobb, mint a „mozi”, ha a lány is meccsre megy ($3 > 1$), de rosszabb, ha a lány moziba megy ($1 < 2$). A Lány számára éppen fordítva. Vegyük észre azonban, hogy a (meccs, meccs) stratégiapárnak a következő vonzó tulajdonsága van: mindkét játékos számára optimális az egyensúlyi stratégia, ha a másik játékos is a párban szereplő stratégiát választja. (Ezt a stratégiapárt fogjuk Nash-egyensúlynak nevezni.) Valóban, ha a lány meccsre megy, akkor a fiú számára is a meccs optimális ($3 > 1$); és ha a fiú meccsre megy, akkor a lány számára is a meccs az optimális választás ($2 > 1$).

Hasonló érveléssel belátható, hogy a (meccs, meccs) pár mellett a (mozi, mozi) pár is Nash-egyensúly. Felvetődik a kérdés: A résztvevők melyiket válasszák a két egyensúly közül? Hogyan koordinálja a szerelmespár a választást? (Hogy ne a lány menjen a meccsre és a fiú a moziba!)

Még nehezebb a helyzet a következő példában, ahol még Nash-egyensúly sem létezik, legalábbis közönséges értelemben nem.

2.3. példa. Érempárosítás. Két játékos egyidejűleg elhelyez 1–1 Ft-ot Fejre vagy Írásra. Ha azonos állásút választanak, az 1. nyer; ha különbözőt, akkor a 2., mindkétszer 1 Ft-ot.

2.3. táblázat. *Érempárosítás*

2. („oszlop") játékos 1. („sor") játékos	Fej	Írás
Fej	(1, –1)	(–1, 1)
Írás	(–1, 1)	(1, –1)

1700 körül keletkezett elképzeléseket újra felfedezve, Boreltől és Neumann Jánostól származik az ötlet, hogy az eddigi *tiszta* stratégiák mellé *kevert* stratégiákat kell bevezetni, ahol a stratégia választása a véletlenen alapszik. Ekkor az ellenfél nem tudja kiismerni a játékos döntését. A Nash-egyensúly a kevert stratégiákra is definiálható és létezése igazolható (3.2. tétel).

2.3. példa. (Folytatás.) Könnyen belátható, hogy a Forintpárosításban egyensúlyi megoldás, ha mindkét játékos egymástól függetlenül 1/2–1/2 valószínűséggel választja a Fejet vagy az Írást. Valóban, legyen rendre ξ és η a két játékos F választásának a valószínűsége. Ekkor az 1. játékos várható nyeresége a négy elemi esemény nyereségének a várható értéke, azaz $u_1(\xi,\eta) = \xi\eta - \xi(1-\eta) - (1-\xi)\eta + (1-\xi)(1-\eta)$. Deriválva ξ-szerint és 0-vá téve a deriváltat, adódik az egyensúlyi valószínűség: $\eta^* = 1/2$. Itt vált u_1 ξ-szerinti deriváltja pozitívból negatívba, tehát u_1-nek lokális és globális maximuma van. Hasonlóan $\xi^* = 1/2$.

Azaz mindkét játékos földobja a saját pénzét, és ahogy esik, úgy puffan. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, pl. $\xi > 1/2$, akkor a 2. játékos ezt hosszú távon kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $\eta = 0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége 1/2 fölé kerül, s a 2. játékos nyer.

Mielőtt tovább mennénk, három feladatot tűzünk ki megoldásra.

2.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az 2.2. példában, a *nemek harcában* a Fiú (2/3, 1/3) és a Lány (1/3, 2/3) kevert stratégiája az egyetlen valódi kevert Nash-egyensúly.

2.2. feladat. „Gyáva nyúl." Két autós a következő életveszélyes játékkal szórakozik. Egy keskeny híd két végéről indulnak egymással szembe – és sokan nézik őket. Két döntés lehetséges: Kitérni vagy Hajtani. Ha mindkettő Hajt, akkor egymásnak ütköznek a hídon, a „nyereségpár" (–3, –3). Ha mindkettő Kitér, akkor leégnek a nézők előtt: a „nyereségpár" (1, 1). Ha az első Kitér, s a második Hajt, akkor az 1. pofára esik, a második sikert arat: a „nyereségpár" (0, 2), és hasonlóan a szimmetrikus esetben (2, 0).

a) Van-e a játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

b) Határozzuk meg a játék kevert Nash-egyensúlyát!

c) Mi a valószínűsége, hogy a kevert Nash-egyensúlyban a versenyzők életben maradnak?

d) Melyik egyensúly adja a legnagyobb hasznot az 1. játékosnak?

Egy játék *szimmetrikus*, ha azonos a stratégiák halmaza és a két játékos kifizetési mátrixa egymás tükörképe. Figyeljük meg, hogy a felsorolt játékok közül szimmetrikus *a fogolydilemma* (2.1. példa), *a gyáva nyúl* (2.2. feladat). Azt várnánk, hogy az egyensúlyi stratégiák is azonosak, ez azonban általánosan nem igaz (lásd 2.2. feladat).

2.3. feladat. Koordinációs játék. Szimmetrikus játékban elegendő az 1. játékos nyereségmátrixát feltüntetni.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lássuk be, hogy két szigorú tiszta Nash-egyensúly létezik és egy kevert szimmetrikus Nash-egyensúly!

Eddig olyan játékokat mutattunk be, ahol a játékosok egyszer és egy időben lépnek. Most olyan játékra hozunk példát, ahol a két játékos egymást követve lép.

2.4. példa. Ragadozó játék. Egy piacot egy bentlévő (I=incumbent) vállalat monopolizál, de egy másik vállalat (E=entrant) próbál belépni. Ha E belép, akkor I kétféleképpen válaszolhat: vagy *alkalmazkodhat* a belépőhöz, visszafogva kibocsátását, hogy megőrizhesse a piaci árat; vagy felveheti a harcot a belépővel: *ragadozó magatartást tanúsít*, leengedi az árat, hogy elriassza vagy kiszorítsa a belépőt. A játék kifizetési mátrixa (más néven, stratégiai alakja, amelyet eddig elemeztünk), a következő:

2.4. táblázat. *Ragadozó játék*

	Bentlevő vállalat (I)	harcol	alkalmazkodik
Belépő vállalat (E)	kint marad	(0, 2)	(0, 2)
	belép	(–3, –1)	(2, 1)

A stratégiai alak elemzése két Nash-egyensúlyt ad: (E kint marad; I harcol, ha E belép) és (E belép; I alkalmazkodik, ha E belép). Logikailag szinte ránézésre látható, hogy az első egyensúly elfogadhatatlan (E kint marad, de I mégis arra készül, hogy E belép) és nem is hiteles I fenyegetése, hogy harcol (nyeresége –1), míg alkalmazkodásnál a nyereség 1. Itt bizonyos stratégiapárok nem valósulhatnak meg, ezért irreális a szerepeltetésük.

A dinamikus leírást az ún. *extenzív alak* adja, amelyben az egymás utáni lépéseket egy fa írja le. Példánkban az 1. játékos az 1. időpontban lép, a 2. a 2.-ben.

(2.1. ábra)

2.5. példa. Dollárárverés. (Shubik, 1971.) Az asztalra ki van téve egy 1 dolláros. Két játékos felváltva licitálhat, lépésenként legalább 1 centet és legfeljebb 10 centet emelve a téten. Az nyer, aki a legtöbbet ígéri, de az utolsó előtti licitet is ki kell fizetnie az utolsó előtti licitálónak.

Nem szabványos játék, de jól jellemzi a konfliktusok fokozatos kiterjedését (eszkalációját). Az a játék furcsasága, hogy az $(x-1,x)$ ajánlatpár után következhet az $(x,x+1)$ pár, hiszen az utolsó licitáló költsége csak 2 c-tel nő és nyereménye 0-ról 1 \$-ra nő. Ugyanakkor a két játékos összköltsége $(2x+1)$ c, azaz (49 c, 50 c) után a teljes költség több, mint 1 \$, tehát társasági szinten irracionálissá válik a részvétel. Ennek ellenére gyakran csak a készpénz hiánya vet véget a játéknak.

2.6. példa. „Kicsi a rakás, nagyot kíván”. Adva van egy nyereményhatár, mondjuk 1 millió \$, és széles körben meghirdetik a részvételi lehetőséget. Ha n részvevő van, akkor a nyereménye $1/n$ millió \$, amit egyetlenegy – sorshúzás útján kiválasztott – részvevő kap meg.

A hagyományos játékokban a részvevők számának növekedésekor csak a győzelem valószínűsége csökken fordított arányosság szerint, de a játék összege fix (vagy akár nő is, mint a lottónál). Itt minél nagyobb a tolongás, annál jobban elolvad a nyeremény.

2.7. példa. Tisztességes osztozkodás. 100 Ft-ot kell elosztani két fél között. Az 1. játékos Ft-ban egész értékű ajánlatot tesz a 2. játékosnak, aki vagy elfogadja az ajánlatot és akkor hozzájut a pénzhez, vagy elutasítja, és akkor egyik játékos sem kap semmit sem. Egy racionális játékos 1 Ft-tal is beérné (az is több, mint 0), de a kísérletekben 30–40 Ft-nál kevesebbel nem szokás beérni.

2.8. példa. Hogyan befolyásolja a megfogalmazás (a „csomagolás”) a játékot? Induljunk ki a fogolydilemma következő változatából:

2.5. táblázat. *Fogolydilemma*

2. játékos 1. játékos	Együttműködik	Verseng
Együttműködik	(3, 3)	(1, 4)
Verseng	(4, 1)	(2, 2)

Ismert, hogy az egyensúlyi megoldás a (Versengés, Versengés).
Fogalmazzuk át a feladatot a következőképpen:

2.6. táblázat. *Átfogalmazott fogolydilemma*

	Magadnak	Másiknak
Együttműködik	1	2
Verseng	2	0

Ha az *együttműködés* gombot nyomod meg, akkor magadnak 1-et adsz, a másiknak 2-t; ha a *verseng* gombot nyomod meg, akkor magadnak 2-t adsz, a másiknak 0-át. Belátható, hogy az eredő az előző táblázatban leírt nyereménypárok táblázata. Ennek ellenére ezt a játékot a kísérletekben sokkal kooperatívabban játsszák, mint az eredetit, mert nyilvánvaló benne, hogy csak a másiktól jöhet az igazi nyereség.

A következő példa az igazmondásra ösztönzésről szól.

2.9. példa. Salamoni ítélet (Biblia). Két asszony egyszerre szült egy helyen. Az egyiknek azonnal meghalt a gyereke, és magáénak követelte a másikét. Külső szemlélő utólag már nem tudta megállapítani, hogy valójában kié a gyerek. Salamon izraeli király (i.e. 1000. körül) a következő cseles ítéletet hozta: „kettévágom a gyereket és mindketten megkapják a gyerek felét". Az igazi anya rögtön lemondott a gyerekről (neki a gyerek élete a legfontosabb), s ebből Salamon megtudta, hogy ki az igazi anya, és annak ítélte a gyermeket.

A következő példa a függetlenül hozott döntések összehangolásáról szól.

2.10. példa. Férjek és feleségek (vö. Shakespeare: Makrancos hölgy). A brit TV-ben nagy sikerrel játszottak a következő játékot. Több házaspárt behívnak, elkülönítik a férjeket és a feleségeket. Egy sor kérdést tesznek föl nekik. Minél több válasz egyezik egy házaspárnál, annál nagyobb a siker. Hogy ne állapodhassanak meg a párok előre az i-edik kérdésre adandó válaszról, a kérdéseket eltérő sorrendben adják föl. Mi az optimális stratégia? Például a férj azt válaszolja, amit gondol, és a feleség igazodik a férje ízléséhez.

A következő példa egy szokatlan, de elgondolkodtató játékot ismertet.

2.11. példa. Az egyszám-játék. A játéknak sok részvevője van. Mindenkinek gondolnia kell egy természetes számot, amelyet beküld a játékvezetőhöz. Az nyer, aki a legkisebb olyan számot gondolta, amelyet más nem gondolt. Ha $2n + 1$ részvevő van, akik közül pesszimális esetben éppen ketten gondolják az 1-et, a 2-t, ..., n-et, akkor $n + 1$ lesz a nyerőszám. Minden más esetben kisebb a nyerőszám. A Mérő-féle Füles-pályázaton több mint 8 000 részvevő indult, több mint 2 000 számot küldtek be és a legkisebb egyedi szám a 120 volt. (Az evolúciós játékok elmélete segít a megoldásban.)

A következő példa egy izgalmas kísérletről számol be, amely azt vizsgálta: kialakulhat-e kooperáció egy olyan világban, ahol mindenki önző?

2.12. példa. Stratégiák kísérleti versenye a fogolydilemma ismételt lejátszásánál. Axelrod 1979-ben versenyre hívott fel sok ismert tudóst. Minden részvevőnek be kellett küldenie egy számítógépes programmal leírt stratégiát, amelytől a maximális nyereményt remélheti egy körversenyben, ahol a fogolydilemmát sok menetben lejátsszák, de a részvevők előre nem ismerik a játék hosszát. A beérkező 14 program közül Rapoport szerezte a legtöbb pontot a *Tit for Tat* nevű stratégiájával. Mindössze két sorból állt a program: 1. Az első lépésben kooperál. 2. Ezután azt lépi, amit a partnere az előző lépésben lépett. Axelrod két vonást fedezett fel a sikeres programok között: barátságosságot és megbocsátást.

Miután széles körben közölte a verseny eredményeit, Axelrod 1982-ben egy második versenyt is kiírt. Ezúttal sokkal több részvevő indult, de ismét csak Rapoport nyert, ugyanazzal a programmal. Most Axelrod három újabb jegyet is fölfedezett a sikeres programok között: provokálhatóságot, reakcióképességet és kiismerhetőséget. Érdekes, hogy Rapoport programja mind az öt tulajdonságot maximálisan tartalmazta, és utólag megállapítható, hogy ez volt ismételt sikerének a kulcsa.

3. Nash-egyensúly létezése és alkalmazásai

A 2. fejezet játékelméleti bevezetőjét mélyítjük el ebben a fejezetben. Definiáljuk a Nash-egyensúlyt, majd belátjuk létezését, és bemutatjuk néhány alkalmazását. (Részletesebben, Forgó és szerzőtársai, 2005.)

3.1. Nash-egyensúly és a Brouwer-féle fixponttétel

Legyen a játékosok száma $n > 1$ természetes szám, indexük $i = 1, 2 \ldots, n$. Legyen S_i absztrakt halmaz az i-edik játékos *stratégiá*inak halmaza; általános eleme $s_i \in S_i$ a játékos tetszőleges *stratégiája.* A játékosok egymástól függetlenül választják stratégiájukat, azaz döntenek (nem kooperálnak), s az i-edik játékos haszna $u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ valós szám. Minden játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de a maximum függ a többiek stratégiájától is. Föltesszük, hogy mindegyik játékos mindent tud a többiek lehetőségeiről és érdekeiről, csupán konkrét stratégiáját nem ismeri előre. Legyen $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ a *stratégia-együttesek halmaza.* Mindenekelőtt egy n-szereplős nemkooperatív játék egyensúlyát definiáljuk.

Definíció. Felfedezője tiszteletére azt mondjuk, hogy a játékosok $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ stratégia-együttese *Nash-egyensúly*t alkot, ha semelyik játékosnak sem érdemes egyoldalúan eltérnie az egyensúlyi stratégia-együttesben szereplő saját stratégiájától.

Az n-szereplős Nash-egyensúly egyszerűen megfogalmazható, ha s_{-i} jelöli a „többi" játékos stratégiájából álló hipervektort:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \ge u_i(s_i, s_{-i}^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i\text{-re}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

3.1. példa. A kétszemélyes játék Nash-egyensúlya:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \ge u_1(s_1, s_2^*) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_1 \in S_1\text{-re}$$

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \ge u_2(s_1^*, s_2) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_2 \in S_2\text{-re.}$$

A jobb megértés kedvéért érdemes bevezetni a legjobb válasz fogalmát.

Definíció. Az $\bar{s}_i \in S_i$ stratégia az i-edik játékos egy *legjobb válasza* a többi játékos valamilyen $s_{-i} \in S_{-i}$ stratégia-együttesére, ha $s_{-i} \in S_{-i}$ esetén $\bar{s}_i$ maximalizálja az i-edik játékos hasznát:

$$u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \ge u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i\text{-re.}$$

Az i-edik játékos *legjobb válaszainak halmazát* $b_i(s_{-i}) \subseteq S_i$ stratégia-részhalmaz jelöli:

$$u_i(\bar{s}_i,s_{-i}) \geq u_i(s_i,s_{-i}) \qquad \text{tetszőleges} \qquad s_i \in S_i\text{–re}, \qquad \bar{s}_i \in b_i(s_{-i}).$$

Nyilvánvaló, hogy a Nash-egyensúly azt jelenti, hogy minden játékos stratégiája (nem feltétlenül egyértelmű) legjobb válasz a többiek egyensúlyi stratégiájára:

$$s_i^* \in b_i(s_{-i}^*), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Definiáljuk a következő leképezést: $b(s_1,\ldots,s_n) = b_1(s_{-1}) \times \cdots \times b_n(s_{-n})$. Ez a leképezés az egyéni b_i leképezések Descartes-szorzata. Ekkor az $s^* \in S$ Nash-egyensúly olyan stratégia-együttes, amely legjobb válasz önmagára: $s^* \in b(s^*)$.

Itt találkozunk a leképezés fixpontjával, amely alapvető szerepet játszik a közgazdaságtani egyensúlyelméletben általában és a játékelméletben speciálisan (Zalai, 1989, 6. fejezet Függeléke).

Kezdjük a függvény fixpontjával. Az X absztrakt halmazon értelmezett $f : X \to X$ függvénynek az $x \in X$ pont *fixpont*ja, ha $x = f(x)$.

3.1. segédtétel. *(Brouwer-féle fixpont-tétel, 1913.) Legyen q egy természetes szám. Ha $X \subseteq \mathbf{R}^q$ kompakt és konvex halmaz, és $f : X \to X$ folytonos függvény, akkor az f függvénynek létezik legalább egy fixpontja: $x^* = f(x^*)$.*

3.2. példa. $q = 1$ esetén $X = [a, b]$, tehát a Bolzano-tételhez jutunk. Valóban, $g(x) = x - f(x)$ függvényre $g(a) \leq 0 \leq g(b)$, azaz létezik olyan c, $a \leq c \leq b$, amelyre $g(c) = 0$.

A maximalizálandó függvények vizsgálatakor gyakran hasznos a következő

Definíció. Egy $f : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ függvényt *kvázikonkáv*nak nevezünk, ha egy $X \subseteq \mathbf{R}^q$ konvex halmazon van értelmezve és ha minden $\{x \in X : f(x) > t\}$ *felső szinthalmaz*a konvex, ahol t tetszőleges valós szám.

Akárcsak a konkáv függvényeknél, a kvázikonkáv függvényeknél is igaz, hogy a rájuk vonatkozó maximumfeladatok esetén a lokális maximum egyben globális is. Természetesen egy konkáv függvény kvázikonkáv. A kvázikonkáv függvények valóban általánosítják a konkáv függvényeket abból a szempontból, hogy az előbbieknek bármely monoton növekvő transzformáltja is kvázikonkáv, míg az utóbbiaknál a transzformált lehet nem konkáv is.

Mivel a maximum nagyon gyakran nem egyértelmű, szükségünk van a halmazértékű függvényekre (2.3. példa).

Definíciók. 1. *Halmazértékű leképezés*nek nevezünk két absztrakt halmaz, X és Y közötti $f : X \to Y$ hozzárendelést, amely minden $x \in X$ ponthoz egy $f(x) \subseteq Y$ halmazt rendel. (Ha $f(x)$ minden esetben pont, akkor függvényről beszélhetünk.)

2. A folytonos függvény egyik lehetséges általánosításaként egy leképezést *felülről félig folytonos*nak nevezünk, ha bármely olyan $\{x^m\} \subseteq X$ sorozatra, amely konvergál $x \in X$-hez, és bármely $y^m \in f(x^m) \subseteq Y$, $\{y^m\}$ konvergál $y \in Y$-hoz, akkor $y \in f(x)$ teljesül. Kompakt X tér esetén ez azt jelenti, hogy az $[x,f(x)]$ gráf zárt halmaz.

3. Egy f leképezésnek az $x \in X$ pont *fixpont*ja, ha $x \in f(x)$.

Könnyen belátható a

3.2. segédtétel. *Legyen Y és V egy véges-dimenziós euklideszi tér kompakt és konvex részhalmaza, és legyen a $g : Y \times V \to \mathbf{R}$ függvény folytonos az (y,v) szerint és kvázikonkáv az y szerint. Rendelje a h leképezés minden $v \in V$-hez a maximumot adó pontok halmazát Y-ban. Ekkor a h leképezés nemüres, felülről félig folytonos és konvex értékű.*

A folytonos függvényekre vonatkozó Brouwer-féle fixpont-tételt (a 3.1. segédtételt) általánosítja leképezésekre a

3.3. segédtétel. *(Kakutani fixpont-tétele, 1941.) Ha X egy véges-dimenziós euklideszi tér nemüres, konvex és kompakt halmaza; ha f az X-nek egy önmagára való, felülről félig folytonos leképezése, amely minden $x \in X$-hez nemüres konvex halmazt rendel, akkor f-nek létezik fixpontja: $x^* \in f(x^*)$.*

A most felsorolt fogalmak és segédtételek szinte sugallják a nemkooperatív játékelmélet alaptételét, amely Nash (1951) tételét általánosította:

3.1. tétel. *(Nikaido–Isoda, 1955.) Egy n-személyes játéknak létezik legalább egy Nash-egyensúlya, ha teljesülnek a következő feltételek:*

a) az S_i stratégiahalmaz egy m_i-dimenziós euklideszi tér nemüres, konvex és kompakt halmaza;

b) Az i-edik játékos $u_i(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n)$ hasznosságfüggvénye folytonos minden változójában és kvázikonkáv s_i-ben, $i = 1,\ldots, n$.

Bizonyítás. A 3.2. segédtétel szerint minden játékosra a legjobb-válasz leképezés nemüres, konvex értékű és felülről félig folytonos. A fentebb definiált $b(s)$ leképezés a nemüres, konvex és kompakt S halmazt önmagába képezi le és szintén felülről félig folytonos. Kakutani fixpont-tételének minden feltétele teljesül, azaz létezik olyan $s^* \in S$ stratégia-együttes, amely a b leképezés fixpontja: $s^* \in b(s^*)$. ∎

A következő példa folytonos stratégiahalmazon szemlélteti a Nash-egyensúlyt.

3.3. példa. Telephely-választás. Hotelling (1929) a következő elhelyezkedési feladatot elemezte. Tegyük föl, hogy 1 km hosszú strandon a strandolók egyenletesen oszlanak el. Két fagylaltos kínálja azonos áron azonos minőségű portékáját, és minden strandoló ahhoz a fagylaltoshoz megy, aki közelebb van hozzá. A fagylaltosok a forgalmukat akarják maximalizálni. Képviselje a strandot a [0, 1] intervallum. Ha az 1. fagylaltos x_1-ben áll, és a 2. fagylaltos $x_2 \geq x_1$-ben áll, akkor $x^* = (x_1 + x_2)/2$ a fagylaltosok közti felezőpont. Az 1. fagylaltoshoz mennek a $(0,x^*)$ szakasz strandolói, és a 2.-hez az $(x^*,1)$ szakaszé.

a) A fagylaltosok Nash-egyensúlyban a strand közepén helyezkednek el. (Ha $x_1 < x_2$, akkor az 1.-nek érdemes jobbra húzódnia, a 2.-nek pedig balra: tehát Nash-egyensúlyban $x_1 = x_2$. Ha $x_1 = x_2 < 1/2$, akkor az 1.-nek érdemes jobbra húzódnia, ellentmondva az $x_2 \geq x_1$ feltevésnek. Nash-egyensúly: mindkét fagylaltos középen áll.)

b) A társadalmi optimum az (1/4, 3/4) felállás lenne, mert ekkor a fogyasztó által megteendő átlagos távolság 1/8, ellentétben az egyensúlyi 1/4-del.

c) Belátható, hogy három fagylaltos esetén nincs tiszta, de van kevert Nash-egyensúly. ∎

3.4. példa. Medián szavazó. Nagyon találó a 3.3. példa politológiai átértelmezése. Tegyük föl, hogy a választók preferenciái (pl. az adókulcs nagyságáról) a [0, 1] intervallumon egyenletesen oszlanak meg. Két párt van, amelynek programja a [0, 1] intervallum egy-egy pontja. A Nash-egyensúlyban mindkét párt a középen elhelyezkedő szavazó kegyeiért esedezik. ∎

Történelmileg az első tétel a játékelméleti egyensúlytól kétszemélyes, nullaösszegű játékra vonatkozott, ahol $n = 2$, $u_1 + u_2 = 0$. u-val jelölve az 1. játékos hasznosságfüggvényét, a másodiké $-u$. Ilyen játék például a sakk, ha a győzelem 1 pontot, a vereség –1 pontot és a döntetlen 0 pontot ér (itt a szokásos pontokat 2-vel megszorozzuk és 1-et levonunk).

3.1. feladat. Igazoljuk, hogy a kétszemélyes nullaösszegű játéknál a Nash-egyensúly ekvivalens a minimax-feltétellel:

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2).$$

Végül kimondjuk a 3.1. tétel nevezetes következményét.

3.1. következmény. *(Neumann, 1928.) Bármely kétszemélyes nullaösszegű játéknál a kevert startégiák halmazán létezik legalább egy Nash-egyensúly.*

3.2. Oligopólium

A hagyományos közgazdaság-elmélet kizárólag a monopóliumot és a tökéletes versenyt tanulmányozta. A valóságban nagyon gyakori viszont, hogy néhány vállalat alkotja a piacot: ez az ún. *oligopol piac.* Ilyen volt például a sokáig zárt amerikai autópiac a híres hármassal: a General Motors, a Ford és a Chrysler. Ebben a pontban ezt az esetet vizsgáljuk, amely kiváló alkalmazása a Nash-egyensúlynak.

Az ipari szervezetek (industrial organizations) elméletében az első lépés a valóság pontosabb leírása felé a két vállalatból álló piac vizsgálata volt. Figyelemre méltó, hogy az úttörő Cournot (1838) két vállalat esetében szinte megelőlegezte Nash egyensúlyfogalmát.

Definíció. *Cournot-duopólium*ról beszélünk, ha két vállalat verseng egymással és az i-edik vállalat felteszi, hogy a $j \neq i$-edik vállalat kibocsátása q_j, s ennek megfelelően úgy választja meg $q_i(q_j)$ kibocsátását, hogy adott q_j mellett a $\pi_i(q_i(q_j), q_j)$ profitja maximális legyen. Belső maximumnál:

$$\pi_{i,q_i}(q_i, q_j) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{3.1}$$

Cournot-egyensúly esetén a két feltételezés összhangban van egymással:

$$q_i^* = q_i(q_j^*) \qquad i = 1, 2. \tag{3.2}$$

3.2. tétel. *a) Megfelelő technikai feltételek mellett létezik a Cournot-egyensúly.*

b) A Cournot-duopolár nagyobb, mint a versenyár; és kisebb, mint a monopolár, tehát a megfelelő duopol-kibocsátás kisebb, mint a verseny-kibocsátás; és nagyobb, mint a monopol-kibocsátás.

Az elmondottakat a következő két feladat szemlélteti a legegyszerűbb esetben.

3.2. feladat. a) Lineáris keresleti függvény és különböző lineáris költségfüggvényű két vállalat esetén határozzuk meg a Cournot-egyensúlyt! b) Mikor igaz, hogy a legjobb-válasz függvény kontrakció?

3.3. feladat. Kvadratikus keresleti függvény ($p = 1 - (q_1 + q_2)^2$) és azonos nulla költségfüggvényű két vállalat esetén határozzuk meg a Cournot-egyensúly termelését és profitját!

A duopólium természetes általánosítása az oligopólium.

Definíció. *Oligopólium*ról beszélünk, ha a piacon jelenlévő vállalatok száma nagyobb, mint 1, de olyan kicsi, hogy nem lehet elhanyagolni az egyes szereplők döntései közti kölcsönhatásokat.

Jelenleg nincs általánosan elfogadott oligopólium-elmélet. Szemléltetésül a következő példát tanulmányozzuk.

3.5. példa. Szimmetrikus oligopol piac. A piacon n egyforma vállalat tevékenykedik, egységköltségük egyaránt c. A piac keresleti függvénye lineáris: $Q(p) = a - bp$, ahol $Q = \sum_i q_i$. Föltesszük, hogy $a > bc$, azaz $p = c$ minimumárhoz tartozó kereslet pozitív. A Cournot-megoldás általánosításából adódik a *Nash-egyensúly*, ahol minden i-re adottnak véve a többi vállalat döntését, az i-edik vállalat optimuma a Nash-egyensúlybeli érték. Képletben: alkalmazva a $q = (q_i, q_{-i})$ fölbontást, legyen az i-edik vállalat profitfüggvénye $\pi_i(q_i, q_{-i})$. Ekkor a q^* vektor Nash-egyensúly, ha minden i-re és minden q_i-re

$$\pi_i(q_i^*, q_{-i}^*) \geq \pi_i(q_i, q_{-i}^*).$$

Esetünkben Nash-egyensúlyban az egyes vállalatok kibocsátása azonos, és a $Q^*(n) = nq_1^*(n)$ összkibocsátás, valamint az ár rendre

$$Q^*(n) = \frac{n(a - bc)}{n + 1} \qquad \text{és} \qquad p^*(n) = \frac{a + nbc}{(n + 1)b}. \tag{3.3}$$

Érdemes kiszámítani az egy vállalatra jutó profitot és az összprofitot:

$$\pi_1^*(n) = (p^*(n) - c)q_1^*(n) = \frac{a - bc}{(n + 1)^2 b} \qquad \text{és} \qquad \Pi^*(n) = n\pi_1^*(n) = \frac{n(a - bc)}{(n + 1)^2 b}.$$

Két határeset létezik:
a) $n = 1$, monopólium: $Q_{\mathrm{M}}^* = (a - bc)/2$ és $p_{\mathrm{M}}^* = (a + bc)/2b$;
b) $n = \infty$, tökéletes verseny: $Q_{\mathrm{C}}^* = a - bc$ és $p_{\mathrm{C}}^* = c$. ∎

Összefoglalva: A 3.5. példában a versenyző vállalatok számának növekedésével a kínálat nő (tökéletes versenynél éppen kétszer akkora, mint a monopóliumnál); az ár pedig csökken (tökéletes versenynél megegyezik a határköltséggel).

Végül egy meglepő feladat, amely rávilágít a Cournot-modell egyik gyengeségére.

3.4. feladat. (Salant et al., 1983.) Lássuk be, hogy ha egy n-szereplős piacon az 1. vállalat kettéosztja önmagát, akkor a haszna jelentősen nő, de a többieké annyira csökken, hogy a termelők összhaszna is csökken!

Végül megemlítjük a játékelmélet fontos alkalmazásaként az információ-gazdaságtant, amelyről Vincze (1991) és Szatmári (1996) ad jó áttekintést.

4. Nemnegatív elemű mátrixok és az ágazati kapcsolatok mérlege

A matematikai közgazdaságtanban alapvető szerepet játszanak a nemnegatív elemű mátrixok. Ezek elmélete utat nyit a gyakorlatilag is használható ágazati kapcsolatok modelljéhez.

4.1. Nemnegatív elemű mátrixok

Bemelegítésül felidézzük a következő meghatározásokat.

Definíció. Az n-edrendű M mátrixnak a λ komplex szám a *sajátértéke*, az s n-vektor pedig a *sajátvektora*, és a $P(\lambda)$ polinom a *karakterisztikus polinomja*, ha teljesül

$$Ms = \lambda s, \quad s \neq 0, \tag{4.1}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M). \tag{4.2}$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei azonosak a sajátértékekkel, számuk multiplicitással n.

Definíció. Az M mátrix *spektrálsugar*a az n darab sajátértékek abszolút értékének maximuma; jele: $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.

A *spektrálsugár* definíciójához szorosan kapcsolódik két további meghatározás. Egy mátrix *domináns sajátértéke* egy olyan sajátérték, λ_1, amelynek abszolút értéke maximális: $|\lambda_1| = \rho(M)$. Domináns sajátértékhez tartozó sajátvektort *domináns sajátvektor*nak nevezünk, amelynek algebrai és geometriai multiplicitása egyaránt lehet 1-nél nagyobb. (Például az I transzformációnak minden nemnulla vektor domináns sajátvektora, 1 sajátértékkel: $r = r^* = n$.)

Nyilvánvaló okok miatt a közgazdaságtanban nagyon fontosak a *nemnegatív (pozitív) elemű* mátrixok, ahol $m_{ij} \geq 0$ $(m_{ij} > 0)$. (A legújabb magyar helyesírási szabályzat megalkotói nagy hibát követtek el, amikor bevezették a *nem* kezdetű jelzők különírását! Ugyanis a *nem negatív* elemű mátrixok nem azonosak a *nemnegatív* elemű mátrixokkal! Az előbbi osztályba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek van legalább egy nem negatív elemük, míg az utóbbiba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek minden eleme nem negatív!)

Tekintsünk a következő nemnegatív elemű mátrixokat.

4.1. példa. Különféle nemnegatív elemű mátrixok.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definíció. *Irreducíbilis* mátrixokról beszélünk, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz nem bontható fel két olyan nemtriviális J és J^* indexhalmazra, amelyre a keletkező M_{J^*J} és M_{JJ^*} blokkok egyike nulla mátrix.

Ahhoz, hogy kevésbé formális legyen a meghatározásunk, érdemes gráfokra lefordítani a definíciót. Képzeljük azt, hogy van egy n-csúcsú irányított gráfunk, amelyben az i-edik pont akkor és csak akkor van összekötve a j-edikkel, ha az (i,j) mátrixelem pozitív. (Természetesen elképzelhető, hogy az i-edik csúcs össze van kötve a j-edik csúccsal, de fordítva nem.) Ekkor a mátrix irreducibilitása azt jelenti, hogy a hozzá tartozó gráf csúcspontjai nem oszthatók két olyan csoportba, hogy egyik csoport egyik csúcsa sincs összekötve a másik csoport semelyik csúcsával. Természetesen a mátrixot *reducíbilis*nek nevezzük, ha nem irreducíbilis. (Vegyük észre, hogy minden blokk-diagonális mátrix reducíbilis, hiszen ott egyik csoport sincs összekötve a másikkal.)

Néha blokk-diagonális mátrixokkal dolgozunk, mert azok kisebb méretű mátrixokhoz vezetnek. Máskor éppen ellentétes a célunk, el akarjuk kerülni, hogy a rendszer részeire bomoljék.

A következő tételt és folyományait Perron (pozitiv mátrixokra) és Frobenius (nemnegatív mátrixokra) fedezte föl, és az 1950-es évek óta alapvető szerepet játszanak a matematikai közgazdaságtanban.

4.1. tétel. *(Frobenius 1. tétele: 1908, Zalai, 1989, 2. fejezet.) Legyen a négyzetes M mátrix nemnegatív és irreducíbilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) M-nek van egy pozitív domináns sajátértéke.

b) Létezik (egy skalárszorzótól eltekintve) egyetlen pozitív sajátvektora, amely a pozitív domináns sajátértékhez tartozik.

c) A pozitív domináns sajátérték algebrai multiplicitása 1.

d) A pozitív domináns sajátérték növekvő függvénye bármely pozitív elemnek.

e) Ha a spektrálsugár kisebb, mint 1, akkor $(I - M)^{-1}$ létezik és pozitív.

A **bizonyítás**ból csak az alapgondolatot említjük meg: Az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ esetén

$$\rho(x) = \min \left[\frac{(Mx)_i}{x_i}, \quad 1 \le i \le n, \quad x_i \ne 0 \right]$$

függvény jól definiált, és a maximumát az $s_1 > 0$ sajátvektornál veszi föl, értéke: $\rho(M) = \lambda_1$ pozitív domináns sajátérték.

4.1. feladat. Közvetlenül igazoljuk a 4.1. tételt $n = 2$-re!

A valószínűségszámításból (Rényi, 1966) jól ismert a véges állapotú homogén *Markov-láncok* elmélete, amely izomorf a fenti elmélettel (lásd még az 5.3. tételt).

4.2. feladat. Soroljuk be típusokba a 4.1. példa mátrixait! Nézzük meg, hogy hány domináns sajátértékük és sajátvektoruk van!

4.2. Ágazati kapcsolatok mérlege

Ebben az alpontban az *általános egyensúlyelmélet* egyik gyakorlati alkalmazására, az *ágazati kapcsolatok mérlegére*, ÁKM-re mutatunk egy példát, amely elméletileg is érdekes.

Egy n-szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy *statikus nyílt* ÁKM-modell írja le (Leontief, 1941 és Bródy, 1969). A jelölési egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem nő és nem csökken. (A 7.3. alfejezetben majd feloldjuk ezt a megszorítást.) Legyen a_{ij} a j-edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i-edik szektortól, legyen y_i az i-edik szektor *kibocsátás*a és c_i a végső fogyasztás az i-edik szektor termékéből. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A, y és c.

Szokás szerint föltesszük, hogy A nemnegatív elemű, irreducíbilis mátrix, melynek spektrálsugara kisebb, mint $1 : \rho(A) < 1$. Megfelelő mértékegység-választással biztosítható, hogy $\sum_i a_{ij} < 1$, $i = 1, \ldots, n$, vektoriális írásmódban: $\mathbf{1}A < \mathbf{1}$.

A modell egy egyszerű azonosságon alapul: termelés – termelői fogyasztások összege = végső fogyasztás.

$$(I - A)y = c.$$

Belátható, hogy ez az egyenlet egyértelműen megoldható:

4.3. tétel. *Feltevéseink mellett az ÁKM-modellnek minden pozitív végső fogyasztásra létezik egyetlenegy pozitív kibocsátása:*

$$y = (I - A)^{-1}c.$$

Definíció. Az $(I - A)^{-1}$ mátrixot az A mátrix *Leontief-inverzé*nek nevezik. Matematikában ezt a típusú mátrixot *rezolvens mátrix*nak nevezik.

A 4.3. tétel azt sugallja, hogy akármilyen végső fogyasztás megvalósítható, csak konzisztensen kell megválasztani a kibocsátási vektort. Köznapi tapasztalatainkból tudjuk, hogy ez nincs így, s ennek alapvetően két oka van. a) Vannak korlátos erőforrások (nyersanyagok és munkaerő), amelyek hosszabb távon sem növelhetők tetszés szerint. b) Az ember által készített eszközök előállítása időt vesz igénybe. Ezzel a kérdéssel foglalkozunk a 7.3. alfejezetben.

5. Lineáris differencia- és differenciálegyenletek

Eddig statikus kérdésekkel foglalkoztunk, ahol az időbeli kapcsolatok nem játszottak szerepet. Mostantól kezdve főleg dinamikus kérdéseket vizsgálunk, ahol különböző változók különböző időszakbeli értékei hatnak egymásra. Ebben a fejezetben a legegyszerűbb dinamikus rendszereket mutatjuk be, nevezetesen a lineáris differencia- és differenciálegyenleteket.

Lineáris differenciaegyenletek

A dinamikus matematikai közgazdaságtanban, akárcsak a numerikus analízisben, folytonos idő helyett szívesebben dolgozunk diszkrét idővel. A diszkrét idő előnyei: nem kell bizonyítani a megoldás létezését, könnyű programozni a megoldást, és alkalmas az időbeli késleltetések figyelembe vételére. Természetesen hátrányai is vannak: nem lehet folytonos vonallal szemléltetni a pályákat, s a megoldások „vadul” viselkednek.

Legegyszerűbb dinamikus feladat a középiskolából ismert számtani vagy mértani sorozat, amelynek megoldása zárt alakban játszva megadható. Felvetődik a kérdés: mi a megoldás, ha a feladatot több dimenzióra vagy magasabb rendű esetre általánosítjuk?

Lineáris inhomogén differenciaegyenlet-rendszerről beszélünk, ha

$$x_{t+1} = Mx_t + w, \qquad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{5.1}$$

Kezdetiérték-feladat esetén x_0 kezdeti érték is adva van.

A tömör (5.1) felírás koordinátamentes. Gyakran előfordul azonban, hogy koordinátákban van adva a feladat:

$$x_{i,t+1} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{j,t} + w_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{5.1$'$}$$

ahol $M = (m_{ij})$ az M transzformáció mátrixa rögzített koordinátarendszerben. Általában félreértés nélkül beszélhetünk felváltva transzformációról és mátrixról, mint ahogyan a koordinátamentes, illetve a koordinátás vektornál sem teszünk különbséget.

Az általános megoldáshoz szükségünk lesz a rendszer fixpontjára. (5.1)-ből a következő implicit egyenlet adódik a fixpontra:

$$x^{\mathrm{o}} = Mx^{\mathrm{o}} + w. \tag{5.1$^{\mathrm{o}}$}$$

(5.1$^{\mathrm{o}}$) megoldható. A fixpont létezése és egyértelműsége triviális:

5.1. tétel. *Az (5.1) lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, ha M-nek az 1 nem sajátértéke. Képlete:*

$$x^{\mathrm{o}} = (I - M)^{-1} w. \tag{5.2}$$

Megjegyzés. A 4.1.e. tétel szerint ha $M \geq 0$, irreducíbilis, és $w \geq 0$, akkor $x^{\mathrm{o}} > 0$.

5.1. feladat. Legyen α és β negatív skalár. Határozzuk meg az

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rendszer fixpontját és ellenőrizzük az 5.1. tételt!

Az algebrai lineáris egyenletrendszerek megoldásából ismert az inhomogén és homogén egyenlet megoldásának kapcsolata. Most ezt a fajta kapcsolatot aknázzuk ki a differenciaegyenlet-rendszer esetén.

Vezessük be az

$$\hat{x}_t = x_t - x^{\mathrm{o}} \tag{5.3}$$

*eltérés*vektort, és vonjuk ki (5.1)-ből (5.1°)-t:

$$\hat{x}_{t+1} = M \hat{x}_t. \tag{5.$\hat{4}$}$$

Szóban: az eltérésvektorok kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (5.1) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik. (5.$\hat{4}$) sorozatos behelyettesítésével adódik

$$\hat{x}_t = M \hat{x}_{t-1} = M^2 \hat{x}_{t-2} = \cdots = M^t \hat{x}_0. \tag{5.$\hat{5}$}$$

Visszaírva az eredeti változókat: $x_t = x^{\mathrm{o}} + M^t (x_0 - x^{\mathrm{o}})$.

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, és rövidség kedvéért elhagyjuk a kalapot (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$.) A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk az (5.$\hat{3}$) – (5.$\hat{4}$) egyenletpárt:

$$x_{t+1} = M x_t, \tag{5.4}$$

$$x_t = M^t x_0. \tag{5.5}$$

Általában célszerűtlen minden x_0 kezdőállapotra a hozzátartozó x_t-t (5.5)-tel, mátrixhatványozással kiszámítani. Még akkor is igaz ez a megállapítás, ha a takarékos $M^t x_0 = M(M^{t-1} x_0)$ iterációt alkalmazzuk. Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei és sajátvektorai segítségével M^t egyszerűen fölírható. A dinamikus rendszerek elemzésénél a transzformáció sajátértékeinek és sajátvektorainak jelentőségét éppen az adja, hogy a transzformáció hatványozásánál az előbbiek úgy viselkednek, mintha skalárok volnának, az utóbbiak pedig helyben maradnak. Pontosabban:

$$M^t s = \lambda^t s, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.6}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független sajátvektor, azaz egy *sajátbázis*:

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{5.7}$$

$$Ms_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Ekkor bármely x_0 kezdeti vektor felírható a sajátvektorok segítségével:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{5.9}$$

Fölhasználva (5.5)–(5.6)-ot, (5.8)–(5.9) a következő összefüggést adja:

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^t s_j, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{5.10}$$

Igaz az

5.2. tétel. *Ha M-nek létezik egy sajátbázisa, akkor a sajátvektorok segítségével a kezdeti állapotot fölírhatjuk (5.9) alakban, és a sajátértékeket is igénybe véve a t-edik állapot fölírható (5.10) alakban.*

Megjegyzés. Gyakorlati számításokban elegendő csak a sajátértékeket meghatározni. Ugyanis az $x_t = \sum_{j=1}^{n} v_j \lambda_j^t$, $t = 0, 1, \ldots$ összefüggésekben szereplő ismeretlen v_j vektorokat a kezdeti feltételekből lehet meghatározni.

A számos stabilitásfogalom közül a rövidség kedvéért csak a *lokálisan aszimptotikus stabilitással* foglalkozunk, ahol a fixpont megfelelő környezetéből induló bármely pálya aszimptotikusan tart a fixponthoz: $\lim_{t\to\infty} x_t = x^{\mathrm{o}}$, esetünkben 0-hoz.

Lineáris esetben viszonylag egyszerű a stabilitás elégséges feltétele, és lokális helyett globális stabilitás.

5.3. tétel. *A diszkrét idejű (5.1) lineáris rendszer akkor és csak akkor stabil, ha az M mátrix spektrálsugara kisebb mint 1:*

$$\rho(M) < 1.$$

Bizonyítás. a) Tegyük föl, hogy létezik sajátbázis. Ekkor (5.10) szerint x_t akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-hatvány nullához tart, azaz minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1. b) Az általános esetben ugyanezt az eredményt kapjuk. ∎

A következő példa a legegyszerűbb esetben mutatja be a módszer működését, ahol nincs is rá szükség.

5.1. példa. Diagonális mátrix. Tegyük föl, hogy az M mátrix diagonális: $M = \langle m \rangle$. Ekkor a sajátértékek: $\lambda_j = m_j$ és a sajátvektorok: $s_j = e_j$ (a j-edik egységvektorok). Végül $\xi_j = x_{j,0}$ a kezdeti állapot j-edik koordinátája, azaz $x_t = \sum_j x_{j,0} \lambda_j^t e_j$. A sajátbázisra való áttérés *diagonalizálja* az eredeti transzformációt.

A differenciaegyenletek elméletében kiemelkedően fontosak a kétváltozós rendszerek, s azon belül is a lineárisak. Ezért az állandó-együtthatós kétváltozós (síkbeli) lineáris rendszereket külön megvizsgáljuk: $n = 2$, különös tekintettel az oszcillációkra (ciklusra). Szükségünk lesz a rendszer másodfokú karakterisztikus polinomjára, melynek gyökei meghatározzák a rendszer kvalitatív viselkedését:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta,$$

ahol

$$\omega = \operatorname{tr} M = m_{11} + m_{22} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}.$$

Oszcillációról beszélünk, ha az eltérésváltozók minden időbeli korlátozáson túl időnként előjelet váltanak. Két alesete van:

a) *Elfajult oszcilláció* áll fönn, amikor egy átmeneti időszak után mindkét változó minden időszakban előjelet vált.

b) *Szabályos oszcilláció* áll fönn, amikor a két változó előjelváltása nem mindig egyidejű.

5.4. tétel. *Tipikusan a következő sajátérték párosítások alapján osztályozzuk a síkbeli lineáris rendszereket; szimmetria miatt feltehető, hogy* $|\lambda_2| \le |\lambda_1|$*:*

a) a domináns sajátérték pozitív, $|\lambda_2| < \lambda_1$*: oszcillációmentes;*

b) a domináns sajátérték negatív, $|\lambda_2| < -\lambda_1$*: elfajultan oszcilláló;*

c) komplex sajátértékek, $|\mathbf{Re}\lambda_1| < |\lambda_1|$*: szabályos oszcilláció.*

Megjegyzés. Elvileg az a)–c) eset bármelyike kombinálódhat a stabil, instabil és Ljapunov-stabil eset bármelyikével. Sőt, további fontos alesetek is előfordulnak, például, kettős valós sajátérték ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) esetén a rezonancia. Nincs terünk az összes eset számbavételére. Végül megemlítjük, hogy a differenciaegyenleteknél föllépő zavaros sokféleség az egyik oka annak, hogy a matematikusok inkább differenciálegyenletekkel dolgoznak (lásd 5.2. alfejezet).

Bizonyítás. Föltesszük a sajátbázis létezését, s ez a tipikus eset. (5.10) most kéttagú, $x_t = \xi_1\lambda_1^t s_1 + \xi_2\lambda_2^t s_2$. Valós gyökök esetén λ_1^t dominanciája miatt $x_t \approx \xi_1\lambda_1^t s_1$. Az aszimptotikus tag koordinátáinak előjele nagy t-re a)-nál t-től független, b)-re alternáló. ∎

A komplex gyökök esetét egy példán és egy feladaton szemléltetjük.

5.1. példa. 90°-os forgatás a síkban. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy az $x_t = Mx_{t-1}$ leképezés 90°-os elforgatás a síkban. Nem meglepő, hogy $\lambda_{1,2} = \pm i$, azaz az $x_{1,0} = 1$ és $x_{2,0} = 0$ kezdeti állapot mellett $x_{1,t} = \cos(t\pi/2)$ és $x_{2,t} = \sin(t\pi/2)$.

5.2. feladat. Legyen ρ és φ két pozitív valós szám. Legyen

$$M = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az $x_t = Mx_{t-1}$ leképezés egy ρ-szoros nagyítást/kicsinyítést és φ szögű forgatást ír le a síkban! Igazoljuk, hogy $\lambda_{1,2} = \rho[\cos\varphi \pm i\sin\varphi]$, valamint $x_{1,t} = \rho^t \cos\varphi t$ és $x_{2,t} = \rho^t \sin\varphi t$!

Állandó-együtthatós *n-edrendű* lineáris differenciaegyenletről beszélünk, ha az ismeretlen függvény mellett $y^{(n)}$ a legmagasabbrendű derivált az egyenletben:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t), \qquad a_0 \neq 0.$$

Az ilyen egyenletek egyszerű transzformációval visszavezethetők n-dimenziós elsőrendű egyenletekre, de közvetlenül is megoldhatók (Euler, kb. 1740). Ezt szemlélteti az

5.3. példa. Fibonacci-számok (1202). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának" (Simonyi, 1981, 122. o.). Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$. A rendszer karakterisztikus egyenlete (más szóval: a sorozat generátorfüggvénye, de Moivre, 1724): $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1\lambda_1 + \xi_2\lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$.

5.2. Lineáris differenciálegyenletek

Rátérünk a többváltozós elsőrendű differenciálegyenlet megoldására. Legyen M egy n-dimenziós négyzetes mátrix, x egy n-dimenziós valós vektor.

Analógia alapján kimondható az

5.5. tétel. *(Lagrange, 1765.) Az $\dot{x} = Mx$ elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer x_0 kezdeti feltételhez tartozó megoldása*

$$x(t) = e^{Mt}x_0, \tag{5.11}$$

ahol

$$e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!}. \tag{5.12}$$

A heurisztikus bizonyításban tagonként deriváljuk e^{Mt} hatványsorát, és a skaláris esethez hasonló módon kiderül, hogy $de^{Mt}/dt = Me^{Mt}$. (Az általános bizonyítást például Arnold, 1984, 14–15. fejezete tartalmazza, illetve az 5.2. feladat szemlélteti a legegyszerűbb esetben.)

Hogyan lehet azonban egyszerűen kiszámítani e mátrixhatványsort? Egyelőre félrerakjuk a kezdeti értékeket, és egyszerű megoldásokkal kísérletezünk, amelyek

$$x(t) = e^{\lambda t}v \tag{5.13}$$

alakban írhatók föl, ahol λ tetszőleges valós szám és v valamilyen n-dimenziós vektor. Helyettesítsük be a (5.13) feltételezett megoldást a differenciálegyenletünkbe:

$$\lambda e^{\lambda t} v = M e^{\lambda t} v, \qquad v \neq 0,$$

azaz $e^{\lambda t} \neq 0$ miatt

$$\lambda v = M v. \tag{5.14}$$

A differenciaegyenleteknél előadott megfontolásokból következik az

5.6. tétel. *Ha az $\dot{x} = Mx$ egyenlet M mátrixának van sajátbázisa, akkor az x_0 kezdeti értékhez tartozó megoldás*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k e^{\lambda_k t}$$

alakú, ahol a ξ_k skalárokat egyértelműen meghatározza az

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k$$

kezdeti feltétel.

Megjegyzés. Az igazi nehézséget az okozza, ha nincs n számú független sajátvektor (vö. 5.2. feladat). Arnold (1984, 25. 4. alfejezet) szellemesen jegyzi meg: amikor a 18. század közepén Euler és Lagrange a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásánál többszörös sajátértékekkel találkoztak, a matematikusok még nem ismerték a mátrixok Jordan-alakját (1870). *Heurisztikus* gondolatmenetük a síkbeli egyenletre ($n = 2$) kétszeres sajátérték esetében a következőképpen szemléltethető: közelítsük meg az M mátrixot olyan $\{M_k\}$ mátrixsorozattal, hogy M_k mindkét sajátértéke különböző. Ekkor $\lambda_{1,k}$ és $\lambda_{2,k}$ konvergál a kétszeres multiplicitású λ sajátértékhez, a $v_{1,k}$ és $v_{2,k}$ sajátvektor pedig a „hiányos" v sajátvektorhoz (a második, független sajátvektor hiányzik). De a $\xi_1 e^{\lambda_{1,k} t}$ és $\xi_2 e^{\lambda_{2,k} t}$ kombináció helyett vehetjük a $\xi_1 e^{\lambda_{1,k} t}$ és $\xi_2 (e^{\lambda_{2,k} t} - e^{\lambda_{1,k} t})/(\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k})$ kombinációt, s akkor határértékben $\xi_1 e^{\lambda t}$ mellé a $t\xi_2 e^{\lambda t}$ alapmegoldást kapjuk.

Szemléltetésül két feladat következik.

5.3. feladat. (Hiányos sajátvektorok.) Tekintsük a következő síkbeli differenciálegyenlet-rendszert: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 0$, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgást írja le. Igazoljuk a) közvetlenül és b) közvetve, hogy a megoldás $x_2(t) = x_2^0$ és $x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t$! Fizikai tartalom: x_1 a helyzet, x_2 a sebesség, és a gyorsulás nulla.

5.4. feladat. Határozzuk meg a folytonos idejű rendszer stabilitási feltételét!

6. Nemlineáris differenciaegyenletek: stabilitás, ciklus és káosz

Ebben a fejezetben nemlineáris differenciaegyenleteket tanulmányozunk, mégpedig a fixpont stabilitása, ciklikus és kaotikus pályák létezése szempontjából.

Kezdjük az autonóm nemlineáris elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer felírásával:

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{6.1}$$

A vizsgálatot megkönnyíti, ha a rendszernek van *fixpontja*:

$$x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}). \tag{6.2}$$

Ellentétben a lineáris rendszerekkel, a nemlineáris rendszerben nincs egyszerű megoldási eljárás.

6.1. Stabilitás

Globális stabilitásnál a konvergenciát tetszőleges kezdőpontra kell bizonyítani. Föltesszük még, hogy $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ függvény, ahol $\mathcal{X}$ kompakt halmaz $\mathbf{R}^n$-ben.

Ljapunovtól származik az az elgondolás, hogy ellentétben az 5. fejezet eredményeivel, anélkül is vizsgálható a stabilitás, hogy a megoldást meg tudnánk (vagy meg kellene) határozni, *kvalitatív elmélet*. Csupán olyan pozitív függvényre van szükség, amellyel mérve a távolságot a fixponttól, a függvény csökken. Szabatosan megfogalmazva: egy folytonos $V : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ függvényt *Ljapunov-függvény*nek nevezünk az f függvényre nézve, ha

(i) a V függvény a fixpontban nulla, különben pozitív:

$$V(x^{\mathrm{o}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad V(x) > 0 \quad (x \ne x^{\mathrm{o}});$$

és

(ii) lényegében minden $(x, f(x))$ állapotpárban V csökken:

$$V[f(x)] < V(x) \qquad \text{kivéve, ha} \qquad x = x^{\mathrm{o}}.$$

6.1. tétel. *(Ljapunov, 1893.) Ha létezik egy Ljapunov-függvény a dinamikára nézve, akkor a fixpont globálisan stabil.*

Megjegyzések. 1. Általában nehéz találni Ljapunov-függvényt, speciális esetekben azonban vannak módszerek, amelyek segítenek. Például minden diszkrét idejű stabil lineáris rendszerre létezik egy kvadratikus Ljapunov-függvény.

2. Érdemes megemlíteni a Ljapunov-tétel fizikai hátterét: disszipatív rendszerben (ahol a mechanikai energia egy része másfajta energiává alakul át), a mechanikai energia mindaddig csökken, amíg a rendszer el nem éri az egyensúlyi állapotát.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathcal{X}$ tetszőleges kezdő állapot és legyen $\{x_t\}$ a belőle induló pálya. Ha a pálya valamikor beleugrik a fixpontba, akkor a stabilitás triviális. A továbbiakban kizárhatjuk ezt az esetet. Ekkor a $\{V(x_t)\}$ sorozat pozitív és csökkenő, tehát van torlódási pontja, amelyet V^*-gal jelölünk. Mivel $\mathcal{X}$ kompakt, tartalmaz legalább egy konvergens részsorozatot: $\{x_{t_j}\}$, amelynek határértéke x^*. Mivel V folytonos függvény, $V(x^*) = V^*$ és $\{f(x_{t_j})\}$ konvergál $f(x^*)$-hoz. De $\{V(x_t)\}$ is konvergens, tehát a két torlódási pont azonos: $V(x^*) = V[f(x^*)]$. A (ii) tulajdonság értelmében $x^* = x^{\mathrm{o}}$. Ha minden részsorozat ugyanoda tart, akkor a teljes sorozat is konvergens. ∎

A 6.1. tételben nehézséget okoz, hogy a tétel általában nem ad módot a Ljapunov-függvény megszerkesztésére. Némileg segít ezen nehézségen a lokális stabilitás feltétele. A globális konvergenciával szemben, a lokális stabilitás csak a fixpont megfelelően kis környezetéből induló pályák konvergenciáját szavatolja. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható függvény egy x^{o} fixpontban, és legyen

$$M = \mathbf{D}f(x^{\mathrm{o}}), \qquad w = f(x^{\mathrm{o}}) - Mx^{\mathrm{o}},$$

ahol $\mathbf{D}$ a differenciáloperátor. Ekkor az

$$x_{t+1} = Mx_t + w$$

rendszert a (6.1) rendszer *linearizált részé*nek nevezzük. Most kimondjuk az 5.3. tétel nemlineáris általánosítását:

6.2. tétel. *A diszkrét idejű, nemlineáris (6.1) dinamikus rendszer lokálisan stabil az x^{o} pontban, ha a linearizált rész stabil, azaz a mátrix spektrálsugara kisebb, mint 1:*

$$\rho(M) < 1.$$

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy folytonos jobb oldalú (6.1) differenciaegyenlet-rendszer jobb oldalát kicsit megváltoztatva, adott időszakban a megoldás is csak kicsit változik. A 6.2. tétel ezt a folytonosságot terjeszti ki az egész időtengelyre, egyenletesen.

2. A tétel kiegészítése is fontos: a rendszer lokálisan instabil, ha a linearizált rész instabil: $\rho(M) > 1$. Mi van akkor, ha $\rho(M) = 1$? Hasonlóan az analízishez, amikor a lokális szélsőértékről semmit sem tudunk mondani, ha a második derivált nulla, ilyenkor további vizsgálatokra van szükség.

A skalár esetben megadjuk a bizonyítást. Legyen $x^{\mathrm{o}} = 0$, akkor $f(x) = Mx + \vartheta(x)$, ahol $\lim_{x\to 0} \vartheta(x)/x = 0$. $V(x) = x^2$ a jelöltünk a Ljapunov-függvény szerepére. Akkor a nemnegativitási feltétel teljesül, és a monotonitási feltétel $V[f(x)] < V(x)$, azaz $M^2x^2 + 2Mx\vartheta(x) + \vartheta(x)^2 < x^2$ is áll, ha $\varepsilon = \vartheta(x)/x$-ra teljesül

$$\varepsilon < \min\left[\frac{\sqrt{1-M^2}}{2},\ \frac{1-M^2}{4|M|}\right].$$

Ehhez elegendő, ha $|x|$ elegendően kicsiny. ∎

A fejezet hátralévő részében alapvető szerepet játszik a legegyszerűbb nemlineáris függvény.

6.1. példa. Logisztikus egyenlet: Legyen $n = 1$ és

$$f(x) = ax(1-x), \quad 0 < x < 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \le a \le 4.$$

Működőképesség: $0 \le f(x) \le f(1/2) = a/4 < 1 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$. Fixpont: $x^o = 1 - 1/a$. Lokális stabilitás: $|f'(x^o)| < 1$. Mivel $f'(x) = a(1-2x)$ és $f'(x^o) = 2 - a$; a stabilitási tartomány: $1 < a < 3$. (A triviális $x^o = 0$ fixpont instabil: $f'(0) = a > 1$.)

A következő tételben visszatérünk a globális stabilitáshoz, de olyan erős feltevések mellett, hogy a fixpont létezését és egyértelműségét nem is kell föltennünk, mert bizonyíthatjuk.

Ehhez szükségünk lesz a kontrakció fogalmára. Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ leképzést a korlátos és zárt (kompakt) $\mathcal{X}$ halmazon *kontrakció*nak (zsugorításnak) nevezünk, ha $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ és a képpontok távolsága kisebb, mint a tárgypontoké:

$$||f(x) - f(y)|| < ||x - y||, \qquad \text{ha} \qquad x \ne y \in \mathcal{X}.$$

Megjegyzés. Az $\mathcal{X}$ halmaz kompaktsága és a norma folytonossága miatt – a Weierstrass-tétel értelmében – az egyenlőtlenség élesíthető: van olyan $0 < \delta < 1$ valós szám, amelyre

$$||f(x) - f(y)|| < \delta||x - y||, \qquad \text{ha} \qquad x \ne y \in \mathcal{X}.$$

Ha a fenti képlettel definiáljuk a kontrakciót, akkor nincs szükség az $\mathcal{X}$ halmaz korlátosságára.

Most már kimondható a nevezetes

6.3. tétel. *(Banach-féle fixpont tétel.) Ha az f függvény kontrakció az $\mathcal{X}$ kompakt halmazon, akkor a (6.1) rendszernek pontosan egy fixpontja van, s ez globálisan stabil.*

Megjegyzés*. Ez a tétel általánosabb terekre is érvényes, ahol a tér elemei nem véges dimenziós vektorok, hanem például folytonos függvények. A leképezések például az 5.2. alfejezetben tárgyalt differenciálegyenlet megoldásának fokozatos megközelítései, s a határérték a differenciálegyenlet pontos megoldása.

Bizonyítás. A kontrakció erősebb definíciójából teljes indukcióval adódik

$$||x_{t+1} - x_t|| = ||f(x_t) - f(x_{t-1})|| < \delta||x_t - x_{t-1}|| < \delta^t||x_1 - x_0||.$$

Innen $u > t$-re a háromszögegyenlőtlenség ismételt alkalmazásából adódik

$$||x_u - x_t|| \le ||x_u - x_{u-1}|| + \cdots + ||x_{t+1} - x_t|| < \sum_{k=t}^{u-1} \delta^k ||x_1 - x_0|| < \frac{\delta^t}{1-\delta}||x_1 - x_0||.$$

Tehát $\{x_t\}$ Cauchy-sorozat, létezik $\mathcal{X}$-beli határértéke: x^{o}. Az f folytonossága miatt $x^{\mathrm{o}} = \lim_t x_t = \lim_t f(x_{t-1}) = f(x^{\mathrm{o}})$, tehát x^{o} fixpont. Indirekt módon belátjuk, hogy csak egy fixpont van. Legyen legalább két különböző fixpont: $y^{\mathrm{o}} \ne x^{\mathrm{o}}$. Ekkor $||x^{\mathrm{o}} - y^{\mathrm{o}}|| = ||f(x^{\mathrm{o}}) - f(y^{\mathrm{o}})|| < ||x^{\mathrm{o}} - y^{\mathrm{o}}||$, ellentmondás. ∎

Megjegyzés. $n = 1$ esetén egy sima f leképezés a korlátos és zárt I szakaszon kontrakció, ha $|f'(x)| < 1$, $x \in I$. Valóban, a Lagrange-féle középértéktétel szerint minden (x,y) párhoz van olyan z, amely x és y között van, és amelyre $|f(x) - f(y)| = |f'(z)|\,|x - y| < |x - y|$.

A következő feladatok a kontrakciós-elv alkalmazhatóságának korlátjait mutatják meg.

6.1. feladat. Nincs fixpont. a) Lássuk be, hogy az $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ függvénynek nincs fixpontja $(-\infty,\infty)$-ban, bár $0 < f'(x) < 1$ minden valós x-re teljesül! b) Miért nem alkalmazható a kontrakciós tétel?

Skalárfüggvények esetén jól használható az ún. *Lamerey-lépcső* (Arnold, 1984, 18. ábra), amely a síkbeli $\{(x_t,f(x_t))\}$ és $\{(x_t,x_t)\}$ pontsorozatokat összekötő vízszintes és függőleges szakaszokból álló lépcső. Például az x_0 pont képe $f(x_0)$: $(x_0,0)$ pontból egy függőleges egyenes visz az $(x_0,f(x_0))$ pontba. Innen egy vízszintes egyenes az $y = x$ egyenesből kimetszi az (x_1,x_1) pontot: $x_1 = f(x_0)$, ahonnan újabb függőleges és vízszintes egyenesek jönnek. A 6.1. és a 6.2. ábra két logisztikus függvényre bemutat egy ilyen lépcsőt. (Közgazdászok ezt a pókhálóelméletből ismerik.)

6.2. feladat. Négyzetgyökvonás. 4000 évvel ezelőtt a babiloniak egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatták ki:

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + \frac{\beta}{x_{t-1}}\right),$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám.

a) Bizonyítsuk be az eljárás konvergenciáját a Lamerey-lépcső segítségével a $\beta < x_0 < \infty$ tartományra! b) Bizonyítsuk be, hogy a leképezés kis x-ekre nem kontrakció, de az eljárás mindig β négyzetgyökéhez konvergál!

6.2. Ciklusok

Mindenekelőtt fölidézzük a ciklus definícióját.

Definíció. Legyen P egy 1-nél nagyobb természetes szám. Egy $x_1, x_2, \ldots, x_P$ vektorsorozatot az f rendszer *P-periódusú ciklus*ának nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \ldots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be.

Nemcsak a fixpont, de a ciklus is lehet stabil.

Definíció. Egy $x_1, \ldots, x_P$ ciklust az f rendszer *P-periódusú lokális határciklus*ának nevezünk, ha az x_1 közelében induló pályák rásimulnak a ciklusra. Képletben:

$$\text{Ha} \quad y_1 \approx x_1, \quad \text{akkor} \quad \lim_{k\to\infty} y_{kP+Q} = x_Q, \tag{6.3}$$

ahol k és Q egészek, $1 \le Q \le P$.

Globális határciklus esetén *majdnem* tetszőleges induló állapotból induló pályától megköveteljük a konvergenciát. Lehetnek azonban kivételes induló állapotok, például egy instabil fixpont, amelyből nyilván nem mozdul ki a rendszer.

A fixpont és a ciklus közti hasonlóságot az f függvény *iteráltjai*nak segítségével érthetjük meg, amelyeket rekurzióval definiálunk:

$$f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \ldots, f^t(x) = f(f^{t-1}(x)).$$

Megjegyezzük, hogy $x_0 t = f^t(x_0)$.

6.4. tétel. *Ciklus és fixpont. a) A (6.1) rendszernek az $x_1, x_2, \ldots, x_P$ sorozat akkor és csak akkor P-periódusú ciklusa, ha a*

$$z_t = f^P(z_{t-1})$$

P-iterált rendszernek x_Q a Q-adik nem triviális fixpontja:

$$x_Q = f^P(x_Q) \ne f(x_Q), \qquad Q = 1, \ldots, P.$$

b) Az a) ciklus akkor és csak akkor lokálisan stabil (határciklus), ha a megfelelő fixpontok stabilak, azaz, ha a megfelelő mátrix stabil:

$$\rho[\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)] < 1. \tag{6.4}$$

Bizonyítás. a) Triviális. b) A 6.3. tétel szerint $\rho[\mathbf{D}f^P(x_1)] < 1$, s a szóban forgó mátrix a láncszabály szerint $\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)$-gyel egyenlő. ∎

A következő példában egy 2-határciklust határozunk meg.

6.2. példa. Iterált logisztikus egyenlet. 2-határciklus: A 6.4. tétel alapján

$$f^2(x) = af(x)[1-f(x)] = a^2x(1-x)(1-ax+ax^2), \quad 0 < x < 1.$$

2-ciklus: $x_i = f^2(x_i)$, $i = 1, 2$ és $x_i \ne x^o$. A kapott $a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1+a)x - a^2 = 0$ harmadfokú egyenletet elosztva $a(x - x^o)$ elsőfokú gyöktényezővel, egy másodfokú egyenlethez jutunk: $a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$, melynek két valós gyöke van:

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a},$$

mindkettő 0 és 1 közé esik, ha $3 < a < 4$.

Stabilitás: (6.4) szerint $f^{2'}(x_i) = f'(x_1)f'(x_2) = -a^2+2a+4$, stabilitási tartomány: $|f^{2'}(x_i)| < 1$, azaz $3 < a < 1+\sqrt{6}$.

6.3. Káosz

Most olyan nemlineáris rendszereket fogunk tanulmányozni, amelyek se nem stabilak, se nem ciklikusak, se nem kvázi-ciklikusak, hanem kaotikusak. [Részletesebben lásd Szépfalussy és Tél (1982).]

Természetesnek tűnhet, hogy a dinamikus rendszer pályája alig változik, ha a kezdőérték kicsit változik. Ezen alapul a Laplace-féle determinizmus: ha ismerjük a rendszer kezdőállapotát és mozgásegyenletét, akkor tetszőleges múltbeli vagy jövőbeli pillanatra meghatározható a rendszer állapota. Ennek egyik legsikeresebb példája az volt, amikor Leverrier (és Adams) számításai alapján a csillagászok 1846-ban fölfedezték a Neptunt. A (6.1) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzéketlen a kezdőértékre*, ha a) a pálya korlátos és b) közelről induló pályák mindig közel maradnak egymáshoz. Képletben: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $||x_0 - y_0|| < \delta_\varepsilon$, akkor $||x_t - y_t|| < \varepsilon$, $t = 1, 2, \ldots$.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy egy korlátos lineáris rendszer minden pontjában érzéketlen a kezdőértékre. Valóban, az a) feltétel miatt csak olyan rendszereket kell tekintenünk, melyeknek a sajátértékei abszolút értékben nem nagyobbak, mint 1 [(5.10)]. Emiatt az eltérések tetszőleges kicsinek tarthatók.

2. Ha nem tennénk föl a korlátosságot, akkor számos lineáris rendszer nem lenne a kezdőértékekre érzéketlen. Valóban, legyen $x_{t+1} = 2x_t$. Ekkor kis δ esetén az $x_0 = \delta$ és a 0 kezdőérték nagyon közel van egymáshoz, de a belőlük induló $2^t\delta$ és 0 pályák egyre messzebb kerülnek egymástól. Ebben semmi meglepő nincsen, s a továbbiakban nem foglalkozunk nem korlátos rendszerekkel.

3. Emlékeztetőül: még olyan jól viselkedő nemlineáris rendszer is érzékeny néhány kezdőállapotra, amelynek globális határciklusa van; az instabil fixpontból induló pálya a fixpontban marad, de akármilyen szűk környezetéből induló összes többi pálya a határciklushoz tart: a 6.2. példa.

Eddig kizárólag klasszikus fogalmakkal foglalkoztunk, amelyeknek önmagukban semmi közük sincs a káoszhoz. Most rátérünk az alfejezet központi fogalomcsoportjára.

Egy dinamikus rendszert *valóban kaotikus*nak nevezünk, ha pozitív valószínűséggel a pálya érzékenyen függ a kezdőértéktől.

Korábbi megfigyelésünk szerint csak nemlineáris függvényeknél találkozhatunk káosszal.

Egy valóban kaotikus rendszer legalábbis egy pozitív mértékű kezdőállapothalmazon rosszul viselkedik. Ez azt jelenti, hogy a rendszerre pozitív valószínűséggel *nem* érvényes a laplace-i determinizmus. Az elv annak ellenére nem érvényes, hogy nagyon egyszerű, kis-szabadságfokú rendszerről van szó. Ezt a körülményt még 1900 előtt Poincaré fölismerte az ún. háromtest probléma kapcsán, de ez több évtizedig elsikkadt.

Egyébként a kaotikus dinamikának számos definíciója van, ezek közül még egyet körvonalazunk. Egy dinamikus rendszer *topologikusan kaotikus*, ha a) végtelen sok különböző periódusú ciklusa van, b) megszámlálhatatlanul sok aciklikus (nem ciklikus) pályája van, és c) az aciklikus pályák mind egymástól, mind a ciklusoktól időnként határozottan eltérnek.

Vannak olyan topologikusan kaotikus rendszerek, amelyek nem valódi kaotikus rendszerek (például a későbbi 6.3. példa). Ezek a rendszerek *hosszú távon* elég rosszul, *kiszámíthatatlanul* viselkedhetnek bizonyos kivételes kezdőállapotokra, de aszimptotikusan jól, *kiszámíthatóan* viselkednek a legtöbb kezdőállapotra. (*Rövid távon* viszont sok kezdőállapotnál is rosszul viselkednek!)

Most pedig bemutatjuk az $a = 4$ paraméterértékű logisztikus függvényt egyszerűsítetten szemléltető *sátorleképezés*t:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 < x \le 1. \end{cases} \tag{6.5}$$

Szóban: a függvény az első intervallumban lineárisan nő, a másodikban lineárisan csökken, 0 és 1 között.

Ismerkedésként kezdjük a következő feladattal.

6.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a sátorleképzés a) igazi fixpontja $x^o = 2/3$ és b) 2-ciklusa $x_1 = 2/5$ és $x_2 = 4/5$, c) két 3-ciklusa van: $\{2/9, 4/9, 8/9\}$ és $\{2/7, 4/7, 6/7\}$, d) mindegyik instabil!

Mit mondhatunk az iterációk határértékéről, ha általános skalárfüggvénnyel dolgozunk?

6.5. tétel. *Legyen f egy egycsúcsú és sima függvény, amely az $I = [a, b]$ valós intervallumot önmagára képezi le. Tegyük föl, hogy a függvénynek van 3-ciklusa, azaz egy olyan c pontja, amelyre*

$$f(c) \neq f^2(c) \neq f^3(c) = c.$$

a) (Sárkovszkij, 1964.) Ekkor bármely, 1-nél nagyobb természetes P számra a rendszernek van P-ciklusa.

b) (Li és Yorke, 1975). Ekkor a rendszer topologikusan kaotikus.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, de nem igényel mély eszközöket. Meglepő, hogy a tételt nem fedezték föl jóval korábban.

2. Könnyen belátható, hogy számos függvénynek van 3-ciklusa (például az alábbi 6.3. példa), de nagyon meglepő, hogy minden P-re van P-ciklusa. Képzeljünk el egy olyan $\{x_{1,P}, x_{2,P}, \ldots, x_{P,P}\}_{P=2}^{\infty}$ kettős sorozatot a (0, 1) intervallumban, amelyre $f: x_{1,P} \to x_{2,P} \to \ldots \to x_{P,P} \to x_{1,P}$, $P = 2, 3, \ldots$.

Nem lenne csoda, hogy egy ilyen rendszer vadul viselkedne, ahogyan Li és Yorke állítja. Valóban? A választ a számítógépes szimuláció adja. Ez segít az analitikus vizsgálatokban alkalmazott függvények tulajdonságainak megállapításában és gyakran pótolja az analitikus elemzést. A szimuláció további előnye, hogy megvilágít bizonyos mennyiségi viszonyokat.

Először csak egy dinamikus rendszer néhány pályáját tanulmányozzuk.

6.4. feladat. A logisztikus egyenlet néhány pályája. Írjunk egy számítógépes programot a logisztikus egyenlet viselkedésének tanulmányozására a következő paraméterértékeknél! a =1; 2; 3; 3,5; 3,839 és 4. Kísérletezzünk a kezdőértékekkel!

6.3. példa. Egy vagy végtelen sok ciklus? Legyen $a = 3{,}839$. a) Ekkor az $x_{1,3} = 0{,}149888$, $x_{2,3} = 0{,}489172$ és $x_{3,3} = 0{,}959299$ sorozat globálisan stabil 3-ciklust alkot. b) Következésképpen az összes többi P-ciklus ($P = 2, 4, 5, \ldots$) lokálisan instabil.

A logisztikus egyenlet stabil fixpontjáról, valamint 2- és 3-határciklusáról mondottakat (6.3. feladat és 6.2., 6.3. példa) folytatjuk.

6.6. tétel. *Logisztikus egyenlet. Az* $x_t = ax_{t-1}(1 - x_{t-1})$ *logisztikus leképezésnek*

a) $1 < a < 3$ *esetén egyetlen globálisan stabil fixpontja van;*

b) $3 < a_k < a < a_{k+1} < 3{,}57$ *esetén egyetlen globálisan stabil,* 2^k*-ciklusa, véges számú instabil* 2^h*-ciklusa* $(h = 1, 2, \ldots, k-1)$ *és egy instabil fixpontja van;*

c) $3{,}57 < a \leq 4$ *esetén bizonyos paraméterértékeknél végtelen számú (különböző periódusú) instabil ciklusa, még több aperiodikus pályája van: hol topologikus, hol valóban kaotikus dinamikáról tanúskodva.*

Bizonyítás helyett. A bizonyítás nagyon bonyolult és mély matematikai eszközöket igényel, ezért csak utalunk a sátorleképezésre. A dolog lényege az, hogy a növelésével a k-adik iterált függvény a fixpontok közelében hasonlóvá válik elődjéhez, lásd Szépfalussy és Tél (1982).

Megjegyzések. 1. Sokan elfeledkeznek arról, hogy a logisztikus egyenletnek minden a-ra legfeljebb egy határciklusa lehet, azaz a többi ciklus láthatatlan. Sőt, az is előfordul, hogy a határciklus majdnem globálisan vonzó.

2. Nem eleve világos, hogy a kaotikus $(3{,}57; 4]$ intervallum pontjai paraméterként milyen dinamikát származtatnak.

Érdemes egy vagy néhány pálya helyett az összes paramétert egyszerre és aszimptotikusan vizsgálni. Ezt a megoldást alkalmazza a

6.5. feladat. Bifurkációs diagram. Írjunk egy számítógépes programot a logisztikus egyenlet aszimptotikus viselkedésének tanulmányozására: az a paraméter a $h = 0{,}01$ lépésközzel fussa be a $[2{,}7; 4]$ szakaszt! a) Minden a-ra a kezdőérték legyen $x = 0{,}6$ és az első 200 állapotot dobjuk el (átmeneti állapotok), a harmadik 100 állapot értékét rajzoljuk ki!

b) Javíthatjuk a kép élességét (meggyorsíthatjuk a konvergenciát), ha az a futás kezdőértéke az $a - h$ futás végértéke (6.6. ábra).

6.6. feladat. Önhasonlóság. Nagyítsuk ki a 6.6. ábrát például a $3{,}841 < a < 3{,}857$ és $0{,}13 < a < 0{,}18$ téglalapban. A 6.6. és 6.7. ábra összehasonlítása azt sugallja, hogy a részkép az egész képhez hasonlít, s ez további nagyítás esetén is fennmarad: a jelenséget *önhasonlóság*nak nevezzük.

Ha a perióduskettőzés csupán a logisztikus egyenletre lenne jellemző, akkor nem sokat foglalkoznánk sem vele, sem a perióduskettőzéssel. Mivel univerzális jelenségről van szó, a megállapítások lényege érvényes minden egycsúcsú és sima függvényre.

7. Üzleti ciklusok és készletjelzéses szabályozás

Ebben a fejezetben három közgazdasági modellt vizsgálunk: 1) az üzleti ciklusok Hicks-féle modelljét, 2) a készletjelzéses szabályozás Kornai–Martos-féle modelljét és 3) a dinamikus ÁKM-t.

7.1. Az üzleti ciklus modellje

Hicks (1950) ciklusmodellje az egyik legérdekesebb és leghasznosabb modell. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. Makroökonómiában megszokott módon változatlanáras értékekkel dolgozunk. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *nettó beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t-edik időszakban. A készletfelhalmozást belefoglaljuk a beruházásba (tulajdonképpen felhalmozásra gondolunk), s zárt gazdaságot feltételezünk. Először a lineáris változatot mutatjuk be, majd vázoljuk a nemlineáris módosítást is.

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn: termelés =beruházás+fogyasztás, azaz teljesül a
GDP azonosság

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{7.1}$$

J. M. Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátor*t, amely szerint minden időszakban a beruházás arányos az előző időszak termelésváltozásával. A szóban forgó egyenletet Hicks (1950)-ben kiegészítette az *autonóm beruházás*sal.
Lineáris beruházási függvény

$$I_t = I_t^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{7.2}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le, amelyet még egy autonóm taggal módosítanak.
Lineáris fogyasztási függvény

$$C_t = C_t^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{7.3}$$

ahol γ a *fogyasztási határhajlandóság*, $0 < \gamma < 1$; és $1/(1-\gamma)$ a híres *multiplikátor.*

Adott I^{A} és C^{A} pálya, adott β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_{-2} kezdeti érték mellett az I, C és Y pálya egyértelműen meg van határozva.

Tegyük föl, hogy I^{A} és C^{A} szabályos abban az értelemben, hogy időben változatlan $\Gamma > 1$ *növekedési együtthatóval* bővül, azaz

$$I_t^{\mathrm{A}} = i^{\mathrm{A}}\Gamma^t \qquad \text{és} \qquad C_t^{\mathrm{A}} = c^{\mathrm{A}}\Gamma^t. \tag{7.4}$$

Ekkor megfelelő kezdeti feltételek mellett a C, I, valamint az Y pálya is szabályos – ugyanazzal a trenddel.

A (7.4) feltétel mellett ezeket a vizsgálatokat azonban egyszerűbb a *relatív rendszerben* végezni, ahol az eredeti változókat és bizonyos paramétereket a növekedési trenddel elosztjuk.

Relatív változók

$$y_t = \frac{Y_t}{\Gamma^t}, \qquad i_t = \frac{I_t}{\Gamma^t} \qquad \text{és} \qquad c_t = \frac{C_t}{\Gamma^t}. \tag{7.5}$$

Relatív paraméterek

$$i^{\mathrm{A}} = \frac{I_t^{\mathrm{A}}}{\Gamma^t} \qquad \text{és} \qquad c^{\mathrm{A}} = \frac{C_t^{\mathrm{A}}}{\Gamma^t}. \tag{7.6}$$

A $\psi = 1/\Gamma$ jelölés bevezetése után már fölírhatjuk a *relatív egyenleteket*:

$$y_t = i_t + c_t, \tag{7.1$'$}$$

$$i_t = i^{\mathrm{A}} + \beta\psi(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), \tag{7.2$'$}$$

$$c_t = c^{\mathrm{A}} + \gamma\psi y_{t-1}. \tag{7.3$'$}$$

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és a nélkülözhető egyenletektől. Két lehetőségünk van, hogy a szokatlan alakú egyenletrendszert szokásos alakra hozzuk: visszavezetni a) két elsőrendű többváltozós differenciaegyenletre, vagy b) egy másodrendű egyváltozós differenciaegyenletre. A másodikat választva, helyettesítsük be (7.2$'$)-t és (7.3$'$)-t (7.1$'$)-be, s rendezéssel eljutunk egy másodrendű, egyváltozós *alapegyenletrendszerhez*:

$$y_t = i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}} + (\beta+\gamma)\psi y_{t-1} - \beta\psi^2 y_{t-2}, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{7.7}$$

ahol y_{-2} és y_{-1} adott kezdeti értékek. Az y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (i_t és c_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (7.2$'$) és a (7.3$'$) egyenletből.

Két tételt mondunk ki: egyet a egyensúlyra, egyet a stabilitásra és oszcillációra.

7.1. tétel. *(Hicks, 1950.) Az elemi hicksi rendszer y^{o} egyensúlya létezik és egyértelmű:*

$$y^{\mathrm{o}} = \frac{i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}}}{1 - \psi(\beta+\gamma) + \psi^2\beta}, \qquad \text{ahol} \qquad 1 - \psi(\beta+\gamma) + \psi^2\beta > 0. \tag{7.8}$$

7.2. tétel. *(Hicks, 1950.) Az elemi hicksi rendszerben eltekintünk a növekedéstől:* $\psi = 1$.

a) A rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha

$$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta. \tag{7.9}$$

b) A rendszer akkor és csak akkor stabil, ha

$$\beta < 1. \tag{7.10}$$

Megjegyzés. Valóságos körülmények között éves modellben $\beta \approx 0{,}5$ és $\gamma \approx 0{,}75$. Tehát oszcilláció és stabilitás empirikusan összeférhetetlen. A determinisztikus lineáris modell helyett vagy determinisztikus nemlineáris modellt kell vizsgálni vagy sztochasztikus lineáris modellt.

Bizonyítás. Az $y_t = y_0\lambda^t$ alapmegoldást behelyettesítve (7.7) homogén részébe, a $P(\lambda) = \lambda^2 - (\beta + \gamma)\lambda + \beta$ karakterisztikus polinomot kapjuk. Szétválasztjuk a valós és a komplex sajátértékek esetét. A diszkrimináns negativitása négyzetgyökvonás után valóban (7.9)-et adja. A stabilitást külön beláthatjuk. ∎

Mivel a gyakorlatban $\psi \approx 1$, $y^{\mathrm{o}} \approx (i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}})/(1-\gamma) > 0$. A következő szimulációban $y^{\mathrm{o}} = 1$ és $\psi = 1$, ezért $i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$.

7.1. feladat. Válasszunk olyan paraméterértékeket, amelyekre mind a négy eset megvalósul! Írjunk számítógépes programot a GDP-pályára, és futassuk le mind a négy esetre: $\psi = 1$ (nulla növekedés); $i^{\mathrm{A}} = 0$, $c^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$.

Eddig a lineáris modellt vizsgáltuk, ám itt a ciklust csak kivételes paraméterértékekre kapunk, ezért a valóságot csak *nemlineáris* módosítással írhatjuk le. A lényeg a következő.

A lineáris beruházási és fogyasztási egyenlet csak szándékot ad, jelük: i_t^{p} és c_t^{p}. Hicks bevezette a beruházások i^{l} alsó és a GDP y^{u} felső korlátját, amelyet nem hághat át a rendszer.

Tényleges beruházás

$$i_t = \begin{cases} i^{\mathrm{l}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} < i^{\mathrm{l}}; \\ i_t^{\mathrm{p}}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tényleges fogyasztás

$$c_t = \begin{cases} y^{\mathrm{u}} - i_t, & \text{ha } c_t^{\mathrm{p}} + i_t > y^{\mathrm{u}}; \\ c_t^{\mathrm{p}}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Rendezéssel adódik a következő *alapegyenletrendszer*:

$$y_t = f_1(y_{t-1}, y_{t-2}) = \min\{\max[i^{\mathrm{A}} + \psi\beta(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), i^{\mathrm{l}}] + c^{\mathrm{A}} + \psi\gamma y_{t-1}, y^{\mathrm{u}}\},$$

ahol y_{-2} és y_{-1} adott.

7.1. példa. Egyszerű határciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta = 1{,}5$; $\gamma = 0{,}75$ paraméterű rendszer 11-határciklus.

Bár Hicks azt hitte, hogy a rendszer mindig ciklikus megoldást ad, könnyű belátni, hogy ez tévedés, a ciklus mellett kvázi-ciklikus megoldások is adódhatnak.

Hicks vélekedésének egyszerű cáfolatát nyújtja a

7.2. példa. Összetett határciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta = 1{,}5$; $\gamma = 0{,}7$ paraméterű rendszer *összetett 23-határciklus,* azaz két *„11,5”-határciklus* egymásutánja.

Bonyolultabb, de igazibb ellenpéldát ad a

7.3. példa. Kváziciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}05$; $\beta = 1{,}25$; $\gamma = 0{,}7$ paraméterű rendszer *kvázi „12,4”-határciklus.*

Később Hommes (1991) belátta, hogy egy némileg bonyolultabb modellben, ahol a lineáris függvényekben osztott késleltetés szerepel, kaotikus dinamika is felléphet.
Lineáris beruházási függvény osztott késleltetéssel

$$i_t^{\mathrm{p}} = i^{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \psi^k (y_{t-k} - \psi y_{t-k-1}).$$

Lineáris fogyasztási függvény osztott késleltetéssel

$$c_t^{\mathrm{p}} = c^{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{K} \psi^k \gamma_k y_{t-k}, \quad \gamma_k \geq 0; \quad \sum_{k=1}^{K} \psi^k \gamma_k < 1.$$

7.4. példa. Káosz. Az $y^{\mathrm{u}} = 1{,}5$; $i^{\mathrm{A}} = 0$; $\gamma_1 = 0{,}1$; $\gamma_2 = 0{,}3$; $\gamma_3 = 0{,}4$; $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0{,}8$; $\gamma^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$; $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta_1 = 2{,}25$; $\beta_2 = 0$ rendszer kaotikusan viselkedik.

7.2. feladat. Írjunk számítógépes programot és lehetőleg grafikusan ellenőrizzük a 7.1–7.4. példákat!

7.2. Lineáris készletjelzéses szabályozás

Ebben az alfejezetben a többszektoros gazdaság készletjelzéses szabályozásának lineáris modelljét ismertetjük. A többszektoros gazdaság vizsgálatát Kornai és Martos (1971) kezdeményezte, a jelen alak Simonovits (1998) 2.3. alfejezetéből származik.

Egy n-szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy készletekkel bővített nyílt Leontief-modell írja le (4.2. alfejezet). Ellentétben a hagyományos készletszabályozási modellekkel, ebben a modellben (és a modellcsalád többi modelljében) azt akarjuk vizsgálni, miképp működhet egy egész gazdaság *decentralizált készletjelzések* alapján. Egyszerűen szólva azt tételezzük föl, hogy a termelők a termelésüket aszerint növelik vagy csökkentik egy kívülről adott normál értékhez képest, hogy a saját készletük kisebb-e vagy sem a normálisnál. Az éppen időre termelést (angol rövidítése: JIT) modellezve.

A jelölési egyszerűség kedvéért most föltesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem nő és nem csökken. (Hamarosan, a 7.3. alfejezetben feloldjuk ezt a megszorítást.) Legyen a_{ij} a j-edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i-edik szektortól, legyen rendre a t-edik időszakban $z_{i,t}$ és $y_{i,t}$ az i-edik szektor *záró készlet*e és *kibocsátása*, valamint c_i a végső fogyasztás az i-edik szektor termékéből. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A, z_t, y_t és c. Szokás szerint föltesszük, hogy A nem negatív elemű, irreducíbilis mátrix, melynek spektrálsugara kisebb, mint $1 : \rho(A) < 1$.

A modell dinamikája egy egyszerű azonosságon alapul:

készletváltozás = termelés – termelői fogyasztások összege – végső fogyasztás.

A termelői fogyasztás arányos a termeléssel, a végső fogyasztás adott. A modellt egy lineáris decentralizált szabályozási egyenlettel zárjuk le:

az i-edik szektor termelése = kapacitás – reakcióegyüttható × saját készlete.

Fölírjuk a modell egyenleteit.

Készletváltozás

$$z_{t+1} = z_t + (I - A)y_t - c. \tag{7.11}$$

Decentralizált termelésszabályozás

$$y_t = y^* - \langle d \rangle z_t, \tag{7.12}$$

ahol $\langle d \rangle = \langle d_i \rangle > 0$ egy diagonális mátrix.

(7.12)-at behelyettesítve (7.11)-be, adódik az *alapegyenlet-rendszer*

$$z_{t+1} = (I - \langle d \rangle + A\langle d \rangle)z_t + (I - A)y^* - c. \tag{7.13}$$

Mielőtt elemeznénk az alapegyenlet-rendszer dinamikáját, közvetlenül tanulmányozzuk a normál állapot tulajdonságait. Mindenekelőtt egy feltevéssel élünk. A teljes kapacitás képes fedezni a végső fogyasztást:

$$y^* > (I - A)^{-1}c. \tag{7.14}$$

7.3. tétel. *Megfelelő kapacitások esetén [(7.14)] a készletjelzéses rendszernek létezik egyetlenegy pozitív normál kibocsátása és készlete:*

$$y^{\mathrm{o}} = (I - A)^{-1}c \qquad \text{és} \qquad z^{\mathrm{o}} = \langle d \rangle^{-1}[y^* - (I - A)^{-1}c]. \tag{7.15}$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a $z_t = z_{t+1} = z^{\mathrm{o}}$ és az $y_t = y^{\mathrm{o}}$ összefüggést a (7.11)–(7.12) összefüggéspárba, ahonnan helyettesítéssel adódik (7.15). Az $\rho(A) < 1$, A 4.1e. tétel és $c > 0$ folytán $y^{\mathrm{o}} > 0$ és (7.14)–(7.15) értelmében $z^{\mathrm{o}} > 0$. ∎

Szükségünk lesz a következő fogalmakra.

Egy $x_{t+1} = Mx_t$ iteráció *konvergenciasebessége* a spektrálsugár reciprokértéke:

$$\Phi = \frac{1}{\rho(M)}.$$

visszacsatolás csillapított:

$$0 < d \leq \mathbf{1}. \tag{7.16}$$

7.4. tétel. *Tegyük föl, hogy csillapított visszacsatolás működik: (7.16). Ekkor*
a) A készletjelzéses szabályozás stabil.
b) A maximális konvergenciasebesség a $d = \mathbf{1}$ *esetben valósul meg, értéke*

$$\Phi_{\mathbf{1}} = \frac{1}{\rho(A)}.$$

c) A készletjelzéses szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes.

Megjegyzések. 1. Ha túllépünk a $0 < d \leq \mathbf{1}$ korláton, akkor általában tovább gyorsíthatjuk a szabályozás konvergenciáját (kivétel: 7.3. feladat).

2. A közgazdasági szakirodalom általában elhanyagolja a csillapítási tényező kvantitatív kérdését, s megelégszik a stabilitás kvalitatív megállapításával. Modellünk bíztató, hiszen a konvergencia-sebesség megfelelően nagy.

3. Vegyük észre, hogy a stabil készletjelzéses szabályozás hosszú távon elvezet a stacionárius készletvektorhoz. Előzetesen z^o értéke csak centralizált számítással határozható meg.

A következő feladat kivételes példát mutat egy olyan rendszerre, ahol nem lehet tovább gyorsítani a konvergenciát. Simonovits (1998) 2.8. tétel azonban olyan modellre vonatkozik, amelyben ez a negatív eredmény nem csak kivételes inputmátrixra valósul meg.

7.3. feladat. Tekintsünk egy szimmetrikus kétszektoros ÁKM modellt, ahol az A mátrix nettósítva van:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

és a visszacsatolás is szimmetrikus: $d_1 = d_2 = \delta$, de nem feltétlenül csillapított. Igazoljuk, hogy a tágabb maximum is $\delta = 1$!

7.3. Dinamikus ÁKM-modell

Rátérünk a *dinamikus zárt* Leontief-modell ismertetésére. Jelölési könnyítés céljából nyílt modellünket bezárjuk: az $(n+1)$-edik szektornak a munkaerő-szektort tekintjük. Ekkor az egységnyi munkaórához szükséges f fogyasztást és a v ráfordítást a bővített $\mathbf{A}$ mátrix $(n+1)$-edik oszlopának, illetve sorának tekintjük, 0-t írva az DK-i sarokba. A termelési vektort is kibővítjük a munkaerő-szektor kibocsátásával (l): Képletben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & f \\ v & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ l \end{pmatrix}.$$

Ekkor a zárt statikus modell egyenlete

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = 0.$$

Most már ábrázolhatjuk a tőkefelhalmozást is. Legyen b_{ij} a j-edik szektor egységnyi beruházásához szükséges tőkeigény az i-edik szektortól. $\mathbf{B} = (b_{ij})$ tőkemátrix segítségével felírható a tőkefelhalmozási egyenlet:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}.$$

Tegyük föl, hogy a gazdaság minden szektora folyamatosan és azonos λ ütemben bővül: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}e^{\lambda t}$. Ekkor az egyensúly egyenlete

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

Milyen árak tartoznak e modellhez? Legyen $\mathbf{p}$ az $(n+1)$-dimenziós bővített ár(sor)vektor, amelynek fedeznie kell a $\mathbf{pA}$ folyó kiadások mellett a π normál profitrátához tartozó $\mathbf{pB}$ beruházási kiadásokat. Képletben:

$$\mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \pi \mathbf{p}\mathbf{B}.$$

Belátható a

7.5. tétel. *(Bródy, 1969.) Tegyük föl, hogy a bővített inputmátrix spektrálsugara is kisebb, mint 1:* $\rho(\mathbf{A}) < 1$

a) A kibocsátási egyensúlyi egyenletnek pontosan egy pozitív növekedési ütem (λ) *és kibocsátási vektor* ($\mathbf{y}$) *megoldása van:*

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}.$$

b) Az áregyensúlyi egyenletnek pontosan egy pozitív profitráta (π) *és ár(sor)vektor* ($\mathbf{p}$) *megoldása van:*

$$\frac{1}{\pi}\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

c) Az egyensúlyi növekedési ütem és profitráta egyenlő: $\lambda = \pi$.

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet a modell *dualitás*ára: a kibocsátási és az ár sajátvektor hasonló kapcsolatban vannak egymással, mint a lineáris programozás primál és duál feladata. Például az első egyenletet balról beszorozva $\mathbf{p}$-vel, a másodikat jobbról $\mathbf{y}$-nal, adódik

$$\mathbf{p}\mathbf{y} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}, \qquad \text{azaz} \qquad \pi = \lambda.$$

2. Ez a modell Neumann (1938) modelljének egyszerűsített változata. Neumann modelljében egy terméket elvben több eljárással lehetett előállítani (például villamos áramot fával, szénnel, olajjal, gázzal és uránummal), és bármely eljárásnak elvben több terméke is lehetett (például a tehénnek a tej, a hús és a bőr). Mindkét modellnek közös hibája, hogy a munkaerő szektort úgy kezeli mint a többi szektort, márpedig ez legfeljebb egy rabszolgagazdaságra igaz.

8. Variációszámítás és optimális fogyasztási pálya

Ebben a fejezetben bemutatjuk a variációszámítás alapfeladatát és alkalmazását az optimális fogyasztási pálya megtalálására.

8.1. A variációszámítás alapfeladata

A szokásos szélsőérték-feladatokban néhány skalárváltozótól függ egy függvény értéke, és ezt kell maximalizálni vagy minimalizálni. Például a fény homogén közegben a legrövidebb utat, inhomogén közegben a leggyorsabb utat „választja". Teljesen más típusú feladattal állunk szemben, amikor bizonyos feltételek mellett „igazi" görbék hosszát vagy tartományok területét vagy még általánosabban, integrálokat kell maximalizálni. Például a homogén nehézségi térben egy függőleges síkban fekvő két pontot összekötő görbék közül egy cikloison lehet leggyorsabban eljutni a felső pontból az alsóba. Ilyen fajta feladatokkal foglalkozik a *variációszámítás*.

A 17. század végének vezető matematikusai (Jakob és Johann Bernoulli, Newton és Leibniz) konkrét variációszámításokat oldottak meg leleményesen. Euler 1732 körül megfogalmazta és megoldotta a variációszámítás általános alapfeladatát, amelyet később publikált.

Tekintsük a variációszámítás alapfeladatát! Legyen f egy háromváltozós skalárértékű sima függvény a $[0,T]$ szakaszon, a három skalárváltozó t, x és $\dot{x}$. A feladat: keressük azt a sima – megengedett – x függvényt a $[0,T]$ szakaszon, amelynek kezdőértéke x_0, végértéke x_T és amely maximalizálja a

$$I = \int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt \tag{8.1}$$

integrált.

8.1. példa. a) Elemi geometriai módszerrel belátható, hogy két pont között a legrövidebb „út" az egyenes. b) Legyen a két pont $(0,0)$ és $(1,1)$. Analitikus alakban a célfüggvény

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt,$$

amelyről majd belátjuk (8.1. feladat), hogy minimumhelye az $x(t)=t$ egyenes.

Euler a hamarosan részletezendő, Johann Bernoulli-féle diszkretizálási módszerrel felfedezte a variációszámítás alaptételét, amelynek bizonyítását Lagrange tette később szabatossá.

8.1. tétel. *(Euler, 1744 –Lagrange, 1755.) Ha az I „funkcionál” a megengedett x függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor az $x(\cdot)$ függvénynek ki kell elégítenie a következő, ún. Euler–Lagrange-differenciálegyenletet:*

$$f'_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt} f'_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}), \tag{8.2}$$

ahol f'_x és $f'_{\dot{x}}$ rendre az f függvény második és harmadik változója szerinti parciális deriváltfüggvénye.

Megjegyzés. Ez az optimumfeltétel szükséges, de általában nem elégséges. Az f függvény konkavitása elegendő a maximumhoz, de enyhébb feltevések is léteznek.

Bizonyításvázlat. Osszuk föl a $[0,T]$ intervallumot k egyenlő részre: $h = T/k$ egy részintervallum hossza. Helyettesítsük folytonos változóinkat és egyenletünket diszkrét megfelelőikkel. Legyen $t_i = ih$, $x(t_i) = x_i$, $\dot{x}(t_i) = (x_{i+1} - x_i)/h$, $f(t_i,x(t_i),\dot{x}(t_i)) = f(ih,x_i,(x_{i+1} - x_i)/h)$. Ekkor az integrált közelítő téglányösszeg a következő:

$$I_k = \sum_{i=0}^{k-1} hf(ih,x_i,(x_{i+1} - x_i)/h).$$

Fölírjuk az x_i szerinti parciális deriváltat, majd nullává tesszük őt, $i = 0,\ldots,k-1$:

$$h\frac{\partial}{\partial x}f(ih,x_i,\frac{x_{i+1}-x_i}{h}) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(ih,x_i,\frac{x_{i+1}-x_i}{h}) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}f((i-1)h,x_{i-1},\frac{x_i - x_{i-1}}{h}) = 0.$$

Az egyenletet elosztjuk h-val, és k-val tartunk a végtelenhez, azaz h-val 0-hoz. Visszatérve folytonos függvényeinkhez, és kimerevítve egy $t = i(k)/k$ pontot, a második és a harmadik tag tart $-f'_{\dot{x}}$ derivált t szerinti deriváltjához: adódik az Euler–Lagrange-egyenlet. Zsenialitása ellenére a levezetés sántít: nincs bizonyítva, hogy a határátmenet jogos. ∎

8.2. példa. Lineáris-kvadratikus skalár feladat. $f(t,x,\dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2$, $x(0) = 1$ és $x(1) = 1$. Az Euler–Lagrange dfferenciálegyenlet-rendszer $\ddot{x} = x$ – másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Ennek (5.2. alfejezetbeli) megoldása a sajátértékek meghatározásán alapul: $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Tehát az általános pálya: $x(t) = \xi_1 e^t + \xi_2 e^{-t}$. Peremértékekből adódik a peremfeladat megoldása: $x(0) = \xi_1 + \xi_2$ és $x(1) = \xi_1 e + \xi_2 e^{-1}$, azaz $\xi_1 = 1/(e+1)$ és $\xi_2 = e/(e+1)$.

Ha a három változóból egy hiányzik, akkor könnyebb megoldani az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenletet. Itt csak a legegyszerűbb esetet mutatjuk be, amikor t hiányzik: $f(x,\dot{x})$. Ekkor a szükséges feltétel egyszerűsödik: $f'_{\dot{x}}(x,\dot{x}) = c$, ahol c egy alkalmas állandó.

8.1. feladat. Oldjuk meg a 8.1. példát a 8.1. tétel hiányos esetére kidolgozott módszerrel!

Lagrange szabatos bizonyításának alapgondolata jól ismert a tankönyvekből (például Kósa, 1970, 29–31. o.), itt csak dióhéjban vázoljuk. A globális optimum lokálisan is optimum. Tehát, ha csak egy tetszőleges, de rögzített t pont kis környezetében „variáljuk” az optimális pályát egy a valós számmal paraméterezett görbesereggel, akkor az $I(a)$ egyváltozós függvénynek belső szélsőértéke van, tehát $I'(0) = 0$. Ebből számolással adódik az Euler–Lagrange differenciálegyenlet.

8.2. Optimális fogyasztási pálya

Tegyük föl, hogy a fogyasztó T évig él egy oolyan gazdaságban, ahol nincs infláció. (T egy tetszőleges pozitív valós szám, amelynek értéke már születéskor pontosan ismert.) Legyen a t pillanatban a fogyasztó munkajövedelme $W(t)$, tőkéje $A(t)$, amely után a pillanatnyi r kamatláb szerint $rA(t)$ tőkejövedelmet kap. A t időpontbeli fogyasztás $C(t)$, amely kielégíti a következő mérlegegyenletet.
Folyó költségvetési feltétel

$$C(t) + \dot{A}(t) = rA(t) + W(t). \tag{8.3}$$

Legyen u egy $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, $u[C(t)]$ a $C(t)$ fogyasztás *pillanatnyi hasznossága.* A $[0,T]$ időszakra terjedő maximalizálandó összhasznosságról feltesszük, hogy a $\beta \geq 0$ *leszámítolási rátá*val leszámítolt $e^{-\beta t}u[C(t)]$ *függvény idő szerinti integrálja*:

$$I[C] = \int_0^T e^{-\beta t} u[C(t)]\, dt. \tag{8.4}$$

Felidézzük az 1. fejezetből a relatív kockázatkerülési együtthatót:

$$\zeta = \frac{-u''C}{u'}.$$

Behelyettesítve $I[C]$-be az $\dot{A} = rA + W - C$ mérlegegyenletet, egy közönséges variációszámítási feladathoz jutunk:

$$I[A] = \int_0^T e^{-\beta t} u[rA(t) + W(t) - \dot{A}(t)]\, dt, \tag{8.6}$$

amelyhez a következő peremértékeket csatoljuk:

$$A(0) = A_0 \qquad \text{és} \qquad A(T) = A_T. \tag{8.7}$$

Adott mind az induló, mind a záró tőkeállomány. Alternatív megfogalmazásnál a záró tőkeállomány szabaddá tehető és alkalmas függvénye hozzáadható a (8.6) célfüggvényhez.

Szükségünk lesz még a következő jelölésekre.
Az $e^{\xi t}$ függvény $[0,T]$-n vett integrálja:

$$J(\xi) = \frac{e^{\xi T} - 1}{\xi}, \qquad \text{ha} \qquad \xi \neq 0; \qquad J(0) = T; \tag{8.8}$$

az életkereset jelenértéke:

$$\mathbf{W} = \int_0^T e^{-rt} W(t)\, dt. \tag{8.9}$$

Valóban, ha a 0 időpontban $\mathbf{W}$ összeg a fogyasztó rendelkezésére állna, akkor abból $e^{-rt}W(t)\,dt$ összeget a t időpillanatban használna fel, amely addig e^{rt}-szeresére, azaz $W(t)\,dt$-re nőne, s ennek integrálja éppen $\mathbf{W}$ lenne.

A különbségi kamatláb: $\delta = r - \beta$.

Feltesszük, hogy az életkereset elegendő nagy ahhoz, hogy tőkefelhalmozás mellett fogyasztásra is jusson belőle:

$$\mathbf{W} > e^{-rT} A_T - A_0. \tag{8.10}$$

(8.10) triviálisan teljesül, ha $r = 0$, $A_T < A_0$ és $W(t) > 0$.

A modern közgazdasági irodalomban Modigliani és Brumberg (1954) *életciklus-modelljükben* vizsgált először hasonló feladatot, diszkrét idő, nulla kamat- és diszkontláb mellett, optimalizálás nélkül. Következő tételünk az optimális fogyasztási pályát határozza meg.

8.2. tétel. *(Cass, 1965–Koopmans, 1965.) a) Az optimális fogyasztás (relatív) növekedési üteme a különbségi kamatláb és a relatív kockázatkerülési együttható hányadosa:*

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\delta}{\zeta(C)}. \tag{8.11}$$

b) Állandó relatív kockázatkerülési együttható esetén az optimális fogyasztás kezdőértéke

$$C_0 = \frac{A_0 - e^{-rT} A_T + \mathbf{W}}{J(\delta/\zeta - r)}. \tag{8.12}$$

Megjegyzés. Minden eleganciája ellenére ez a feladat keveset mond a valódi fogyasztó viselkedéséről: a) eltekint a megtakarítás folyamatos halasztásától, b) a hitelfelvétel korlátjaitól és c) a hosszú távú trend követésétől. Kicsit részletesebben: a) a fogyasztó minden nap hajlamos másnapra halasztani a takarékosságot; b) a fogyasztónak sokkal nagyobb kamatlábat kell fizetni a hitelért, mint amekkorát a megtakarításért kap; c) a fogyasztó szeretne „lépést tartani a korral”, és nem abszolút, hanem relatív fogyasztási pályáját optimalizálja.

Bizonyítás. a) Fölírva a feladat Euler–Lagrange-differenciálegyenletét, a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{d}{dt}\left[-e^{-\beta t} u'(C)\right] = e^{-\beta t} u'(C) r. \tag{8.13}$$

Deriváljuk a bal oldali szorzatot: $\beta e^{-\beta t} u'(C) - e^{-\beta t} u''(C)\dot{C}$, majd használjuk fel a (8.3) jelöléseket: a (8.11) optimalitási feltételt kapjuk. Általában ζ függ C-től, s az adódó differenciálegyenletet nem tudjuk zárt alakban megoldani.

b) Fölhasználva a (8.5) CRRA-feltevést, integrálhatjuk a $\dot{C}/C = \delta/\zeta$ differenciálegyenletet: $C(t) = C_0 e^{\delta t/\zeta}$.

Visszahelyettesítve a mérlegegyenletbe: $\dot{A} - rA = W - C_0 e^{\delta t/\zeta}$.

A megoldó szorzók módszerét alkalmazva, a legutolsó egyenletet beszorozzuk e^{-rt}-vel, hogy egy függvény deriváltját kapjuk a bal oldalon:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-rt} A\right] = e^{-rt}(\dot{A} - rA) = W e^{-rt} - C_0 e^{(\delta/\zeta - r)t}.$$

Integráljuk az új egyenlet mindkét oldalát a $[0,T]$ szakaszon és vegyük figyelembe $\mathbf{W}$ jelentését: $e^{-rT}A_T - A_0 = \mathbf{W} - C_0 J(\delta/\zeta - r)$, ahonnan (8.12) egyszerűen adódik. ∎

8.2. feladat. Számoljuk végig a b) pontot a nyugdíjmodellben (vö. 10. fejezet): $u(C) = \log C$, $w(t) = 1$, ha $L \le t \le R$ és 0 egyébként, $0 \le L < R \le D$, $r = \beta/2$.

9. Népesedési modellek

A közgazdaságtanban fontos szerepet játszanak a népesedési modellek, különösen a következő fejezetben vizsgált nyugdíjrendszerek szempontjából. Ebben a fejezetben bevezetjük a stacionárius, illetve stabil népesség fogalmát, majd körvonalazzuk a valóságban érvényesülő népesedési folyamatokat (Simonovits, 2002, 7. fejezet).

9.1. Stacionárius vagy stabil népesség

Mindenekelőtt vezessük be a következő valószínűség-számítási fogalmakat! Legyen q_i annak a valószínűsége, hogy egy személy i éves korában, év végén hal meg: $q_i \geq 0$ és $\sum_{i=0}^{D} q_i = 1$. Szükségünk lesz annak a valószínűségére, hogy valaki megéri az i-edik születésnapját; *túlélési valószínűség*: $l_i = \sum_{j=i}^{D} q_j$. Az irodalomban gyakran szerepel a *feltételes halálozási valószínűség*: $q_i/l_i \geq 0$, illetve *feltételes túlélési valószínűség*: $l_i/l_{i-1} > 0$. Végül bevezetjük az *i éves korban várható hátralévő élettartam*ot:

$$E_i = \frac{\sum_{j=i}^{D} q_j(j-i+1)}{l_i}. \tag{9.1}$$

Amikor a születéskor várható élettartamra gondolunk, és annak növekedéséről beszélünk, nem szabad a 20. században folyamatosan és jelentősen csökkenő gyermekhalandóságról elfeledkezni.

Az 1997-es magyar adatokat a 9.1. ábra szemlélteti. Szokásos a férfi és a női adatokat a vízszintes tengely ellentétes oldalára helyezni, s függőlegesen felállítani. Például a két görbe az életkor függvényében mutatja annak a valószínűségét, hogy az adott kort a férfiak, illetve a nők túlélik.

9.1. ábra

Ha a túlélési valószínűségi görbe alatti területet nem vízszintesen fekvő, hanem függőlegesen álló téglákból adjuk össze, akkor (9.1)-ből adódik

$$E_i = \frac{\sum_{j=i}^{D} l_j}{l_i}.$$

Most már bevezethetjük az úgynevezett *stacionárius* és *stabil népesség* fogalmát. Az előbbiben az egyes korosztályok létszáma, az utóbbiban az egyes korosztályok létszámaránya időben állandó.

Jelölje $n_{k,t}$ a k évesek létszámát a t-edik naptári évben. Tegyük föl, hogy az újszülöttek száma évente $\nu - 1$ ütemben nő, a korspecifikus halálozási arány időben változatlan: q_k annak a valószínűsége, hogy valaki éppen k éves korában hal meg.

Ekkor definíció szerint adódik két egyenlet.

Születésszám

$$n_{0,t} = \nu n_{0,t-1}, \tag{9.2}$$

Korosztály-létszám

$$n_{k,t} = l_k n_{0,t-k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, D. \tag{9.3}$$

Behelyettesítve (9.2)-t (9.3)-ba:

$$n_{k,t} = l_k \nu^{-k} n_{0,t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, D. \tag{9.4}$$

Stacionárius népességben $\nu = 1$, a stabilban ν tetszőleges.

A (9.2)–(9.4) összefüggésekből levezethető a

9.1. tétel. *Stabil népesség. a) Minden k-ra a k évesek létszáma a születésszám ν növekedési tényezője szerint nő: $n_{k,t} = \nu n_{k,t-1}$. b) Minél nagyobb a születési szám növekedési üteme, annál nagyobb a fiatalok aránya a népességben.*

Megjegyzés. Minél nagyobbak az időskori túlélési valószínűségek, annál nagyobb az idősebbek aránya a népességben.

A 9.2. ábrán az egynemű fél korfára három változatot mutatunk be: az újszülöttek létszáma a) változatlan, b) nő, illetve c) csökken, a két utóbbi esetben évi 1%-kal. Jól látható, hogy növekvő népesség esetén a korosztályoknak az újszülöttek korosztályához viszonyított *relatív létszáma* két okból is csökken az életkorral: a születettek száma időben visszafelé menve egyre kisebb volt, másrészt egyre kevesebb marad életben a korosztályból. A csökkenő népesség esetén még érdekesebb a helyzet: az életkor múlásával először jelentősen nő, majd később csökken a korosztályok relatív létszáma.

9.2. ábra

Mi szabja meg a születések számát és azok növekedési ütemét? A most bevezetendő születési egyenlet azt tételezi föl, hogy a különböző életkorú emberek (nők) különböző számú gyermeket (lányt) akarnak/tudnak világra hozni:

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k n_{k,t}, \tag{9.5}$$

ahol f_k az egy k éves korú személyre (nőre) jutó pozitív (lány)születések száma, K_1, K_2 pedig a *szülőképességi kor minimuma* és *maximuma*: $0 < K_1 \leq K_2$. Stabil népesség esetén a születésszám növekedési ütemét a születési $\{f_k\}$ és túlélési $\{l_k\}$ együtthatók meghatározzák. A Központi Statisztikai Hivatal (rövidítve: KSH) (1996, 75. o.) 12–13. táblázata adatokat tartalmaz az itt szereplő mutatókról.

9.2. tétel. *Stabil népesség esetén a születésszám növekedési tényezője a következő K_2-edfokú polinom egyetlen pozitív gyöke:*

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \nu^{-k} = 1. \tag{9.6}$$

Ez a gyök akkor és csak akkor nagyobb 1-nél, ha az egy főre (nőre) jutó (lány)szülések száma nagyobb, mint 1:

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k > 1.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a (9.5) születési egyenletbe a (9.4) egyenletet:

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k n_{0,t} \nu^{-k},$$

ahonnan egyszerűsítéssel adódik (9.6). Mivel a (9.6) egyenlet bal oldala csökkenő függvénye ν-nek, legfeljebb egy pozitív gyök lehetséges. Mivel a bal oldal nullában vett határértéke végtelen, a végtelenben vett határértéke pedig 0, mindig létezik egy pozitív gyök: ν. A gyök pontosan akkor nagyobb, mint 1, ha a (9.6) bal oldali kifejezésének értéke $\nu = 1$-ben nagyobb, mint 1. ∎

A (9.5) születési egyenlet azonban átmenetileg instabil népességnél is hasznos. Erre mutat a

9.3. tétel. *(Lotka–Sharpe, 1911.) Állandó termékenységi és halálozási együtthatók esetén, feltéve, hogy legalább két szomszédos termékeny korosztály létezik, a tényleges népességi arányok és a népesség növekedési üteme a megfelelő stabil népesség mutatóinál stabilizálódnak.*

Megjegyzés. A bizonyítás visszavezethető a Markov-láncok ergodicitására (Rényi, 1966). Itt azonban közvetlen bizonyítást adunk.

Bizonyításvázlat. Helyettesítsük be (9.2)-t (9.5)-be, s adódik az

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k n_{0,t-k} \tag{9.7}$$

K_2-edfokú lineáris skalár differenciaegyenlet, $n_{0,-K_2}, \dots, n_{0,-1}$ kezdőértékekkel.

A lineáris differenciaegyenletekről (5.1. alfejezet) tudjuk, hogy az alapmegoldások $\xi_i \lambda^t$ alakúak, ahol

$$\xi \lambda^t = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \xi \lambda^{t-k}.$$

Egyszerűsítve $\xi\lambda^t$-nel, adódik a karakterisztikus egyenlet:

$$1 = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \lambda^{-k}.$$

A 9.1. tétel szerint az egyenletnek egyetlenegy pozitív gyök van: $\lambda_1 = \nu > 0$.

Indirekt bizonyítással adódik, hogy ha $f_i > 0$ és $K_1 < K_2$, akkor a többi λ_j gyöke abszolút értékben kisebb mint ν, azaz a megoldás relatíve stabil. Valóban, indirekt feltevés szerint létezzék egy másik, nem pozitív sajátérték λ, amelynek abszolút értéke legalább ν. Behelyettesítve a sajátérték-egyenletbe, és alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$1 = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k |\lambda|^{-k} < \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k |\nu|^{-k} = 1$$

ellentmondás. Ha megengednénk, hogy mindenki egy időszakban szüljön: $K_1 = K_2$, vagy hogy bizonyos időszakokban senki se szüljön, akkor álltásunkban aszimptotikus stabilitás helyett csak (Ljapunov) stabilitást kapnánk. ∎

A stabil népesség fogalmára épül a *születéskor várható életkor* fogalma is. Tegyük föl, hogy a jelenleg tapasztalható korspecifikus termékenységi és halálozási együtthatók változatlanok maradnak a belátható jövőben. Számítsuk ki a megfelelő stabil népességi arányokat és a halálozási kor várható értékét (LEXP=life expectancy):

$$E_0 = \text{LEXP} = \sum_{k=0}^{D} q_k(k+1) = \sum_{k=0}^{D} l_k.$$

Adott évben a tényleges népességben az adott évben meghaltak várható életkora lehet kisebb is, nagyobb is, mint a fenti érték, attól függően, hogy a tényleges népesség fiatalabb-e vagy idősebb-e, mint a stabil népesség.

(A 9.2. ábrán be is jelöltük a 9.1. példabeli három X_n értéket: $A = 36{,}9$; $N = 32{,}0$ és $F = 41{,}9$ év.)

9.1. feladat. Háromnemzedékes modellel dolgozva ($D = 2$) tegyük föl, hogy csak a második nemzedék szülőképes ($f_0 = f_2 = 0$) és $f_1 = 2$. a) Határozzuk meg a népesség egyensúlyi növekedési tényezőjét! b) Tegyük föl, hogy mindenki maximális korig él, és határozzuk meg a népesség stabil koreloszlását a 0-dik időszakban, 1-nek véve a idősek számát. c) Tegyük föl, hogy a népesség eredetileg növekedett, de a $t = 2$ időszaktól kezdve a termékenységi együttható 1-re, illetve d) az eredeti érték reciprokára csökken. Írjuk le táblázatban néhány időszak koreloszlását mindkét esetben, és számítsuk ki az össznépességét $\nu = 2$-re!

Most már megmagyarázhatjuk az 1978 körül elkezdett egygyermekes kínai családpolitikát: egy olyan népességben, amelyben évtizedeken keresztül gyorsan nőtt a születések száma, a lányok nemzedéke akár kétszer annyi nőből is állhat, mint az anyáké. Ha hatásosan akarják a népesség létszámát korlátozni, akkor időlegesen a korábbinál jóval kisebb létszámú korosztályokat kell létrehozni.

9.2. feladat. Tegyük föl, hogy a mindenkori népesség 4 korosztályból áll, a 0–14 évesek, a 15–29 évesek, a 30–44 évesek és a 45–59 évesek. Mindenki a 60. születésnapján hal meg. A rendszerről minden 15. évben készítünk felvételt. Tegyük föl, hogy a t-edik időszakban a születések száma b_t az 15–29 és a 30–44 évesek létszámának a pozitív lineáris kombinációja: $b_t = f_1 b_{t-1} + f_2 b_{t-2}$, $f_2, f_2 > 0$.

a) Határozzuk meg a stabil népesség születésszámának növekedési tényezőjét (=1+növekedési ütem)!

b) Mi annak a feltétele, hogy létezzék *stacioner* stabil népesség, azaz alkalmas b_{-1}, b_{-2} kezdőállapot esetén a születésszám változatlan legyen?

c) Bizonyítsuk be, hogy a b) esetben tetszőleges b_{-1}, b_{-2} kezdőállapot esetén a születésszám növekedési tényezője tart 1-hez!

9.2. Valóságos népességek

Persze a valóságos népességek nem stabilak: változik a születésszám, mert változnak a termékenységi fajlagosok, de változnak a halálozási mutatók is. Mindenekelőtt bemutatjuk a magyar népesség adatait.

A 9.3. ábra a tényleges magyar születési és csecsemőhalálozási számokat szemlélteti 1911–1995 között (KSH, 1996, 1. táblázat, 65. o.) és az előrejelzett számokat 2050-ig (Hablicsek, 1999, 405. o.) a jelenlegi országhatárok között. Figyelemre méltó, hogy milyen magas értékről indult a születésszám és a csecsemőhalálozás, és milyen kis értékre csökkent mindkettő.

9.3. ábra

A halálozási idősorokat mellőzve, a 9.4. ábra a népességszám alakulását mutatja be ugyanezen időszakra. Figyeljük meg, hogy a két világháborútól és az 1956–1957-es kivándorlástól eltekintve, milyen gyorsan nőtt a népességszám, majd 1980-tól kezdve milyen viharosan csökkent, illetve fog csökkenni a népességszám (KSH, 1996, 4. táblázat, 43. o. és Hablicsek, 1999, 405. o.).

9.4. ábra

A 9.5. ábra a gyermekeknek (0–19 év közöttiek) és az időskorúaknak (64 éves és idősebb) a teljes népességen belüli tényleges és előrebecsült arányát szemlélteti 1910 és 2050 között (KSH, 1996, 5. táblázat, 44–45. o. és Hablicsek, 1999, 405. o.). Természetesen az életben maguk a korhatárok is változnak az időben, ezzel azonban nem foglalkozunk.

9.5. ábra

A nemzetközi előrejelzésekből nyújt ízelítőt a 9.1. táblázat.

9.1. táblázat. *Népességöregedés: időskori függőségi hányadosok, %*

Ország	1995	2010	2030	2050
Chile	18,3	24,4	40,9	56,3
Egyesült Államok	30,3	34,6	52,8	52,9
Hollandia	30,6	40,3	70,7	85,3
Nagy-Britannia	38,0	42,3	62,1	72,3
Németország	36,2	46,5	82,5	101,7
Svájc	33,4	44,5	78,3	89,1

Forrás: Börsch-Supan (2001, 8. o.), 5. táblázat. A 60 évnél idősebbek létszámának aránya a 20–59 évesekéhez képest.

Megjegyezzük, hogy a halandósági fajlagosok csökkenése részlegesen képes megakadályozni a népességszámnak a termékenységi együtthatók csökkenéséből fakadó fogyását, de előbb-utóbb a második hatás válik dominánssá.

Végül utalunk a *nemzetközi migráció*ra, amely alaposan megváltoztathatja egy ország népesedési – s ezáltal nyugdíjrendszere – viszonyait: a célországét javítja, és küldő országét rontja.

10. Nyugdíjmodellek

A fejlett társadalmak öregedésével a nyugdíjkérdés egyre fontosabbá válik. A nyugdíjrendszert két szinten lehet vizsgálni: egyéni és makroszinten (Simonovits, 2002).

10.1. Egyéni szint

Tegyük föl, hogy a dolgozó $L = 0$ éves korában kezd el dolgozni, i évesen w_i a *teljes keresete*. $R+1$ évesen megy nyugdíjba, és D évesen hal meg. Az i-edik év betöltésének *valószínűsége* l_i, $i = 1, 2, \ldots, D$.

Egy *tőkésített rendszer* – gyakran korfüggő – b_j életjáradékot fizet j-éves tagjainak, akik keresetükből folyamatosan – életbiztosítás vétele mellett – tőkét halmoztak föl egyéni számlájukon – az életjáradék forrásaként, $j = R+1, \ldots, D$. Kötelező rendszer esetén a nyugdíjjárulékot általában *kulcs*ként, tehát a kereset arányában adják meg, legalábbis bizonyos korlátok között: jele τ_w. Általában feltesszük, hogy e járulékkulcs időben állandó. Legyen r a reálkamat-tényező.

10.1. tétel. *A tőkésített rendszer paraméterei közt fönnáll a következő összefüggés:*

$$\tau_w \sum_{i=L}^{R} l_i w_i r^{-i} = \sum_{j=R+1}^{D} l_j b_j r^{-j}. \tag{10.1}$$

Bizonyítás. Az egész életpályára vonatkozó nyugdíjbefizetés és -kifizetés várható jelenértékének egyenlősége alapján. ∎

Az életjáradékot szokás az utolsó évi nettókereset (u_R) arányában kifejezni, ahol a személyi jövedelemadótól eltekintünk:

$$b_{R+1} = \hat{\beta}_u u_R, \qquad \text{ahol} \qquad u_R = w_R(1-\tau_w)$$

és $\hat{\beta}_u$ az *egyéni életjáradék nettó zárókereseti helyettesítési értéke.*

A legegyszerűbb esetre összpontosítjuk figyelmünket, amikor a járadék reálértéke állandó, 40 évi járulékfizetés és 20 évi járadék áll szembe egymással. Szemléltetéshez föltesszük, hogy az egyéni zárókereseti helyettesítési arány 40%, és a járulékkulcsot a különféle kamatláb és bérnövekedési ütemre határozzuk meg: $w_i = w_0\Omega^i$. (10.1)-et alkalmazva, adódik az 10.1. táblázat.

10.1. táblázat. *Járulékkulcs a keresetnövekedés és a kamatláb függvényében, %*

	reálkereset növekedési ütem $100(\Omega-1)$	
reálkamatláb	0	2
$100(r-1)$		
0	16,7	22,3
2	9,8	14,1
5	4,0	6,3

Figyeljük meg, milyen érzékenyek a járulékkulcsok a kamatlábra és a bérnövekedés ütemére (valamint az itt kihagyott aktív és passzív szakasz hosszának az arányára).

A 20. század közepén (a Nagy Válság és a II. világháború pusztítása miatt) csődbe mentek a tőkésített nyugdíjrendszerek, és helyükre léptek a *felosztó-kirovó nyugdíj*rendszerek. (Az újabban sokat dicsért magánnyugdíj-rendszerek 2008-ban elvesztették vagyonuk 20%-át!) Ezekben a rendszerekben az egyének kötelezően részt vesznek, és nem saját nyugdíjukra takarékoskodnak előre, hanem az éppen nyugdíjasok járadékát fizetik ki. Egy társadalmi szerződésről van szó, amely a mindenkori fiatalok kötelességévé teszi a mindenkori öregekről való gondoskodást. A legtöbb országban a teljes kereset és a nettó kereset közé feleslegesen beékelődik a *bruttó kereset*, amely a munkavállalói járulékkal nagyobb a nettó keresetnél: $u = v(1-\tau_{2,v})$, és a munkáltatói járulékkal kisebb a teljes keresetnél: $w = v(1+\tau_{1,v})$. Itt az egyén olyan *kezdőnyugdíj*ra számíthat, amely a befizetéseknek, illetve – állandó járulékkulcs esetén – a bruttó kereseteknek valamilyen növekvő (esetleg nemcsökkenő) függvénye. (Azért, hogy ne kelljen külön jelölni a naptári éveket, e kereseteket és a nyugdíjakat az illető születésétől számítjuk, akárcsak korábban):

$$b_{R+1} = h(v_L, \ldots, v_R)$$

S attól kezdve egészen a haláláig az egyénnek meghatározott szabályok szerint változik a nyugdíja, általában az előző évi nyugdíja függvényében:

$$b_{j+1} = H(b_j), \qquad j = R+1, \ \ldots, \ D-1.$$

Látszólag teljes szabadsággal állapíthatók meg a h és a H függvények. Hamarosan azonban látni fogjuk, hogy makroszinten egy tiszta felosztó-kirovó rendszerben minden időszakban a befizetéseknek és a kifizetéseknek egyensúlyban kell lenniük.

A tőkésített rendszerhez legközelebb a *keresetarányos rendszer* áll, amely Németországban működik. Legyen $g = \mathbf{v}_i/\mathbf{v}_{i-1}$ az átlag-reálkeresetek növekedési tényezője. Ekkor a kezdeti nyugdíj

$$b^{(1)}_{R+1} = \alpha_2 \sum_{i=L}^{R} v_i g^{R-i},$$

ahol α_2/τ egy skalár szorzó, amely a $\tau \sum_{i=L}^{R} v_i g^{R-i}$ értékű felhalmozott *eszmei nyugdíjtőkét* b_{R+1} nagyságú életjáradékra váltja át.

A másik véglet az *állandó összegű nyugdíj*, amely független a korábbi kereseti pályától; $b^{(2)}_{R+1}$, ilyen rendszer működik Hollandiában.

A legtöbb kezdőnyugdíj (amerikai, magyar, a brit stb.) a két véglet közé esik, sematikusan a következőképp jellemezhető:

$$b_{R+1} = \alpha b_{R+1}^{(1)} + (1-\alpha) b_{R+1}^{(2)},$$

ahol α egy 0 és 1 közti valós szám, amely a keresetarányos rendszer súlyát mutatja.

Rátérve a már megállapított nyugdíjakra, Németországban őket a keresetekkel párhuzamosan növelik:

$$b_{j+1}^{(1)} = b_j g, \qquad j = R+1, \ldots, D-1.$$

Az azonos összegűben és más rendszerben is a nyugdíj független a nyugdíjas korától:

$$b_{j+1}^{(2)} = b_j, \qquad j = R+1, \ldots, D-1,$$

Közbülső megoldást alkalmaznak néhány országban:

$$b_{j+1} = b_j g^{\theta}, \qquad j = R+1, \ldots, D-1,$$

ahol θ egy 0 és 1 közti valós szám, például Svájcban és Magyarországon 1/2.

10.2. Makroszint

A tőkésített rendszer makroökonómiájáról szinte nincs mit mondani. Ha eltekintünk az élettartam-kockázattól (az életjáradékosítástól), akkor ez a nyugdíjrendszer semmiben sem különbözik a hagyományos megtakarításoktól. Inkább a tiszta felosztó-kirovó makroökonómiáját elemezzük, egyelőre egy adott időpontra szorítkozva. Tiszta felosztó-kirovó rendszer esetén a dolgozók nyugdíjjárulékainak összege megegyezik a nyugdíjak összegével. Definíció szerint teljesül a következő azonosság: nyugdíjasok száma $\times$ átlagnyugdíj = járulékkulcs $\times$ dolgozók száma $\cdot$ átlagkereset. Bevezetve a dolgozók számát: M, a nyugdíjasok számát: P, az átlagnyugdíjat: $\mathbf{b}$ (és felidézve a $\mathbf{v}$ átlagkeresetet), adódik a képlet:

$$P\mathbf{b} = \tau_{\mathbf{v}} \mathbf{M} \mathbf{v}.$$

Rendezzük át az azonosságot:

$$\tau_v = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{v}} \frac{P}{M}.$$

Az új azonosság első tényezőjét már ismerjük, s átlagos helyettesítési aránynak nevezzük: $\beta_v = \mathbf{b}/\mathbf{v}$. A második tényezőt is elnevezzük: *(rendszer)függőségi hányados*=nyugdíjasok száma/dolgozók száma. Jele: $\pi = P/M$. Tehát beláttuk a következő tételt.

10.2. tétel. *Egy tiszta felosztó-kirovó rendszerben a járulékkulcs egyenlő az átlagos helyettesítési arány és a rendszerfüggőségi hányados szorzatával:*

$$\tau_v = \beta_{\mathbf{v}} \pi. \tag{10.2}$$

A magyar nyugdíjrendszerben például $\beta_{\mathbf{v}} = 0{,}6$ és $\pi = 0{,}5$; tehát $\tau_v = 0{,}3$, az amerikaiban viszont $\beta_{\mathbf{v}} = 0{,}4$ és $\pi = 0{,}2$; tehát $\tau_v = 0{,}12$. Minél nagyobb a nyugdíjak relatív színvonala, és minél több nyugdíjas jut egy dolgozóra, annál nagyobb járulékkulcsra van szükség. Ezt az egyszerű dolgot nagyon sok ember képtelen megérteni, és nagyobb nyugdíjat, kisebb járulékot és alacsonyabb nyugdíjkorhatárt követel vagy ígér.

A továbbiakban a (10.2) azonosság jobb oldalának második tényezőjét tovább vizsgáljuk. Figyelembe vesszük, hogy a dolgozók és a nyugdíjasok száma egyaránt függ a lakosság demográfiai szerkezetétől, a foglalkoztatási és a nyugdíjazási helyzettől. Bevezetjük a *részvételi hányadot*, amely a dolgozók (M) és a dolgozókorúak létszámának (M^*) az aránya: $\mu = M/M^*$; a *jogosultsági hányadot*, amely a nyugdíjasok (P) és a nyugdíjaskorúak létszámának (P^*) az aránya: $\zeta = P/P^*$; és a *demográfiai (időskori) függőségi hányadost*, amely a nyugdíjkorúak és a dolgozókorúak létszámának az aránya: $\pi^* = P^*/M^*$. Ezek segítségével részletesebben is fölírható a mutatónk:

$$\frac{P}{M} = \frac{P}{P^*}\frac{P^*}{M^*}\frac{M^*}{M},$$

azaz felhasználva jelöléseinket, adódik a

10.3. tétel. *Egy tisztán felosztó-kirovó rendszerben a rendszerfüggőségi hányados egyenlő a jogosultsági hányad és a demográfiai függőségi hányados szorzatának és a részvételi hányadnak az arányával:*

$$\pi = \frac{\zeta}{\mu}\pi^*.$$

Szóban: Minél több nyugdíjaskorú jut egy dolgozókorúra, minél kisebb a dolgozók aránya a dolgozókorúakhoz képest, és minél nagyobb a nyugdíjasok aránya a nyugdíjaskorúakhoz képest, annál nagyobb a rendszerfüggőségi hányados.

A további elemzéshez vezessük be a következő mutatókat! *Egy dolgozóra jutó GDP*: $y = Y/M$, *bruttóbér-hatékonyság*: $\eta_{\mathbf{v}} = y/\mathbf{v}$. A hagyományos elemzésben a nyugdíjkiadások GDP-hányada kiemelkedő szerepet játszik. Az előzőhöz hasonló módon kifejezhető a *nyugdíjkiadás aránya a GDP-ben*, ha felbontjuk a

$$\frac{P\mathbf{b}}{\mathbf{My}}$$

szorzatot:

10.4. tétel. *A nyugdíjkiadás GDP-hányada egyenlő a rendszerfüggőségi hányad és az átlagos helyettesítési arány szorzatának és a bérhatékonyságnak a hányadosával:*

$$\frac{B}{Y} = \frac{\pi\beta_v}{\eta_{\mathbf{v}}}.$$

Az 10.2. táblázat a magyar gazdaság nettó kereseti adatain szemlélteti a fentieket.

10.2. táblázat. *Nyugdíjak a magyar gazdaságban 1970–1996, %*

	Nyugdíj kiadási	Jogosult-sági	Függő-ségi	Nettó helyette-sítési	Részvé-tel	Nettó bérha-tékonyság
	hányados					
Év	B/Y	ζ	π	$\beta_{\mathbf{u}}$	μ	$\eta_{\mathbf{u}}$
1970	3,5	66,7	38,7	37,5	91,2	305,1
1975	5,0	82,1	37,3	45,4	87,8	315,1
1980	6,9	93,0	38,2	54,7	87,3	320,1
1985	7,9	100,0	40,4	61,2	86,9	358,7
1990	8,8	109,9	41,8	66,2	86,4	398,4
1994	10,0	115,6	41,1	59,5	65,8	430,2
1996	8,9	119,2	40,7	58,9	64,0	504,5

Vegyük észre, milyen látványosan nőtt a nettó keresethez viszonyított nyugdíj 1970 és 1990 között: 37,5%-ról 66,2%-ra. Vegyük figyelembe azonban a táblázat utolsó oszlopát, ahonnan leolvasható, milyen mértékben maradt el az átlagkereset az átlagtermeléstől.

A 10.3. táblázat a nettó keresetek és nyugdíjak reálértékének időbeli alakulását mutatja az átmenet során. Látható, hogy a nyugdíjak gyakran még a kereseteknél is jobban csökkentek vagy lassabban nőttek.

10.3. táblázat. *Nettó keresetek és nyugdíjak reálértékben, Magyarország, 1989=100*

Év	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Kereset	96,6	89,8	89,1	85,0	91,2	80,3	76,2	80,3
Nyugdíj	93,0	86,8	84,7	81,6	85,7	77,2	70,3	71,0

Év	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Kereset	83,0	86,0	87,3	91,9	104,7	114,3	113,1	120,2	123,9
Nyugdíj	75,5	78,8	79,8	84,4	92,7	100,7	104,0	110,5	114,5

A 10.5. tétel megmutatja, hogy minden felosztó-kirovó rendszer megfeleltethető egy hasonló tőkésített rendszernek.

10.5. tétel. *(Aaron, 1966.) Stabil népesség és állandó foglalkoztatási, valamint nyugdíjjogosultsági hányad esetén, ha az életkor-specifikus keresetek és a nyugdíjak azonos és állandó ütemben nőnek, akkor a felosztó-kirovó rendszer belső kamattényezője egyenlő az aggregált reálkereset növekedési tényezőjével, azaz a népesség és az átlag reálkereset növekedési tényezőjének szorzatával:* $\rho = \nu g$.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a teljes foglalkoztatás megvalósul és minden nyugdíjaskorú egy nyugdíjat kap, s más nem kap nyugdíjat. Jelölje v_i az i éves dolgozó keresetét az i-edik évben, és b_j a j éves nyugdíjas nyugdíját a j-edik évben. Legyen 1 a 0-adik évben született korosztály létszáma. Ekkor (9.4.) értelmében a 0-adik évben k évesek száma $l_k\nu^{-k}$. A 0-adik évben i évesek keresete $v_i g^{-i}$ és a j évesek nyugdíja $b_j g^{-j}$. Tehát a 0-adik év keresztmetszeti feltétele

$$\tau_v \sum_{i=L}^{R} l_i\nu^{-i}v_i g^{-i} = \sum_{j=R+1}^{D} l_j\nu^{-j}b_j g^{-j}. \tag{10.3}$$

(10.1) és (10.3) összehasonlításából adódik a tétel. ∎

Érdekes megnézni néhány adatot a tételben szereplő mennyiségekről.

10.4. táblázat. *Átlagos reálütemek és -hozamok: 1953–1995, %*

Ország	Németország	Japán	Nagy-Britannia	Egyesült Államok
Bérnövekedési ütem	4,8	5,2	3,6	1,0
(variancia)	11,8	37,7	8,8	6,0
Állampapírhozam	3,9	3,8	1,0	2,3
(variancia)	1,3	5,4	9,3	8,2
Tőkepiaci hozam	10,1	10,8	10,8	9,8
(variancia)		t ö b b	s z á z	

Forrás: Holzmann (1998, 13. o. 8. lbj.) idézi Thompson (1998) Függelék A. táblázatát.

Az explicit államadósság mellett érdekes lehet még a nyugdíjígéretekben megtestesülő *implicit államadósság* is. Ezt mutatja Holzmann (1998) alapján egy rövidített, 10.5. táblázat.

A 2. oszlopból láthatjuk, hogyan szóródik a bruttó nyugdíjadósság/GDP hányados négy fontos ország esetében 100–200 között. (A felsorolt négy országból csak egyben (az Egyesült Államokban) kisebb a nettó adósság, mint a bruttó mutató, de ott jelentősen: 89%.) A 3. oszlop az éves nyugdíjkiadás/GDP hányadost mutatja be (vö. 8. fejezet), amely a kontinentális Nyugat-Európa és az angolszász országok közti hatalmas különbséget tükrözi: 10 és 5%. Érdekes, mennyivel stabilabb a 4. oszlopban szereplő a nyugdíjadósság/nyugdíjkiadás hányados: 21–25 között mozog. Ezt *eszmei visszafizetési idő*nek is tekinthetjük, ti. hogyha nem keletkeznének új ígéretek, akkor ennyi évre lenne szükség a régi ígéretek teljesítésére. Érdemes figyelembe venni a GDP-hez viszonyított hagyományos államadósságot is (5. oszlop), amely országonként szintén nagyon ingadozik: az angol 35%-tól az olasz 100%-ig. Végül ha összadjuk az 1. és az 5. oszlop adatait, a 6. oszlopban megkapjuk a teljes bruttó adósságot. Itt is az angolszász országok szerepelnek jól, és a kontinentális országok rosszul.

10.5. táblázat. *Nyugdíjadósság és államadósság néhány OECD országra, GDP %*

Ország	Bruttó nyugdíj-adósság (BNYA)	Nyugdíj kiadás (NYK)	Eszmei visszafizetési idő (BNYA/NYK)	Állam- adósság	Összevont adósság
Németország	216	9,0	24,0	40	256
Olaszország	242	10,6	24,4	101	343
Nagy-Britannia	139	6,6	21,1	35	174
Egyesült Államok	112	5,1	22,0	55	167

Forrás: Holzmann (1998, 5. o.) 2. táblázat.

10.1. feladat. Mérlegeljünk egy stacionárius népességű stacionárius gazdaságot, ahol a népesség és a termelékenység növekedési üteme állandó, az egyének nulla évesen kezdenek el dolgozni, adott w_j bérpálya szerint, $R+1$ évesen mennek nyugdíjba, és $D+1$ évesen halnak meg! Tegyük föl, hogy a $t=0$ évben bevezetnek egy felosztó-kirovó rendszert b_j járadékpályával és τ járulékkulccsal! Tegyük föl, hogy az érett rendszer egyensúlyban van. Határozzuk meg az első $D+1$ évjárat belső megtérülési rátáját!

10.2. feladat.* a) Legyen L és I két egész, $0 \le L < I$, δ leszámítolási tényező, y_i az apa jövedelme, $c_i > 0$ az apa fogyasztása i évesen, pozitív számok. Tegyük fel, hogy a család fogyasztása az i-edik évben $m_i c_i$, $i = L, \ldots, I$, ahol $m_i \ge 1$ ún. fogyasztási egyenértékesek. Tegyük fel, hogy $R > 0$ az éves kamattényező. Írjuk fel az apa életpálya költségvetési korlátját a jelenérték segítségével!

b) Tegyük fel, hogy az apa az egész család fogyasztását a következőképpen veszi figyelembe az életpálya-hasznosságfüggvényen:

$$U(c_L, \ldots, c_I) = \sum_{i=L}^{I} \delta^i m_i u(c_i).$$

Határozzuk meg az apa optimális fogyasztási pályájára vonatkozó feltételeket!

c) Milyen (R,δ) párokra nő az életkorral az apa fogyasztása?

d) Hogyan tehető explicitté az optimális pálya egyenlete, ha

$$u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma), \qquad \gamma < 0?$$

e) Hogyan módosul a megoldás kvalitatíve (számok nélkül), ha az apa nem vehet fel kölcsönt?

Feladatmegoldások

1.1. feladat. Nem, mert a nagy számok törvénye szerint minden befizetett Ft-jának csak egy töredékét kapná vissza. (A többi, pár millió résztvevőtől esetleg megszerzett haszon elhanyagolható!)

1.2. feladat. Behelyettesítéssel.

1.3. feladat. a) A maximális biztosítási összeg azt jelenti, hogy a biztosítatlan fogyasztó várható haszna megegyezik a biztosítottéval. Képletben: teljes biztosítás: $pU(w-c)+qU(w) = U(w-b)$, részleges biztosítás: $pU(w-c)+qU(w) = pU(w-c+qk)+qU(w-pk)$. Kockázatkerülő magatartás esetén U konkáv, tehát van kiegyenlítő b_c és b_k díj. b) Numerikusan: (i) $0{,}03{\cdot}0{,}5^{1/2}{+}0{,}97{\cdot}1{,}5^{1/2} = (1{,}5-b)^{1/2}$, $1{,}2092^2 = 1{,}4621 = 1{,}5-b$, azaz $b_c = 0{,}0378$ mFt=37,8 eFt. (ii): $1{,}2092 = 0{,}03\cdot(1{,}4-b_k)^{1/2}+0{,}97\cdot(1{,}5-b_k)^{1/2}$ Rendezve: $b_k = 0{,}0359$ mFt=35,9 eFt.

2.1. feladat. Lásd 2.2. feladat megoldását.

2.2. feladat. a) A (H,H) pár nem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára –3, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz K-t választja, akkor hozama 0-ra nő. A (K,K) pár sem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára 1, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz H-t választja, akkor hozama 2-re nő. Viszont a (H,K) és a (K,H) pár mindegyike Nash-egyensúly. Pl. ha (K,H)-tól az 1. játékos eltérne, akkor hozama 0-ról –3-ra csökkenne; ha a 2. játékos térne el, akkor pedig annak hozama 2-ről 1-re esne.

b) Tegyük föl, hogy az 1. a Hajt stratégiát ξ, a Kitér stratégiát $1-\xi$ valószínűséggel választja; a 2. pedig η, ill. $1-\eta$ valószínűséggel. Ekkor

$$u_1(\xi,\eta) = \xi\eta\cdot(-3)+\xi(1-\eta)\cdot 2+(1-\xi)\eta\cdot 0+(1-\xi)(1-\eta)\cdot 1 = -4\xi\eta+\xi-\eta+1.$$

Deriválva ξ szerint: $u_{1,\xi} = -4\eta+1$, $\eta^* = 1/4$-nél 0, tehát ott u_1-nek lokális és globális maximuma van. Szimmetria miatt $\xi^* = 1/4$-ben u_2-nek lokális és globális maximuma van.

c) Csak akkor van halál, ha mindkét játékos egymástól függetlenül H-t játszik, ennek valószínűsége $\xi^*\eta^* = 1/16$. Az életben maradásé tehát 15/16.

d) $u_1(H,K) = 2$, $u_1(K,H) = 0$ és $16u_1(\xi^*,\eta^*) = -3+3\cdot 2+0+3\cdot 3\cdot 1$, azaz $u_1(\xi^*,\eta^*) = 12/16 = 3/4$.

2.3. feladat. Triviális. A kevert stratégia (1/3, 2/3), vö. 2.2. feladat.

3.1. feladat. Írjuk fel a kétszemélyes játék Nash-egyensúlyát új jelöléssel és szorozzuk be a másodikat –1-gyel. Ekkor egyesíthető a két egyenlőtlenség:

$$u(s_1,s_2^*) \le u(s_1^*,s_2^*) \le u(s_1^*,s_2) \quad \text{minden} \quad s_1 \in S_1\text{–re}, \quad s_2 \in S_2\text{–re}.$$

3.2. feladat. a) Cournot-egyensúly. Az 1. játékos nyeresége $\pi_1(q_1,q_2) = (1 - c_1 - q_1 - q_2)q_1$. Deriválva q_1 szerint és nullává téve a deriváltat: $\pi_{1,q_1}(q_1,q_2) = 1 - c_1 - q_2 - 2q_1 = 0$, rendezve: $2q_1 + q_2 = 1 - c_1$. Szimmetria miatt: $q_1 + 2q_2 = 1 - c_2$. Megoldva az egyenletrendszert:

$$q_1^* = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{3} \qquad \text{és} \qquad q_2^* = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

A feladat közgazdaságilag csak akkor értelmes, ha mindkét vállalat kibocsátása pozitív: $2c_1 - c_2 < 1$ és $2c_2 - c_1 < 1$. Szimmetrikus esetben $c_1 = c_2 < 1$.

b) A

$$q_1' = \frac{1 - c_1 - q_2}{2} \qquad \text{és} \qquad q_2' = \frac{1 - c_2 - q_1}{2}$$

legjobb-válasz függvény kontrakció, $\lambda > 1/2$-del.

3.3. feladat. Az 1. játékos nyeresége $\pi_1(q_1,q_2) = (1 - (q_1 + q_2)^2)q_1$. Deriválva q_1 szerint és nullává téve a deriváltat: $\pi_{1,q_1}(q_1,q_2) = 0$. Bevezetve a $Q = q_1 + q_2$ jelölést és rendezve: $-2Qq_1 + 1 - Q^2 = 0$. Szimmetria miatt: $-2Qq_2 + 1 - Q^2 = 0$. Megoldva az egyenletrendszert: $q_1 = q_2$, $Q = 2q$, tehát $-4q^2 + 1 - 4q^2 = 0$, azaz $q_1^* = q_2^* = 1/\sqrt{8}$.

3.4. feladat. A 3.5. példa szerint $2\pi_1^*(n) > \pi_1^*(n + 1)$, ha $n > 2$ és egyenlőség áll, ha $n = 2$

4.1. feladat. Legyen m_{11}, $m_{22} \geq 0$, M irreducibilitása miatt m_{12}, $m_{21} > 0$. a) Ahhoz, hogy legyen pozitív sajátérték, az szükséges, hogy mindkét sajátérték valós legyen. Ellenőrizni kell, hogy $\omega^2 \geq 4\vartheta$ teljesül-e. Igen, mert rendezéssel $(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21} \geq 0$ adódik. Mivel a két sajátérték összege $(-\omega)$ nemnegatív, és a diszkrimináns pozitív; van pozitív sajátérték, amely (egy) domináns sajátérték.

b) A sajátérték-egyenletet rendezve: $(\lambda - m_{11})x_1 = m_{12}s_2$, $(\lambda - m_{22})x_2 = m_{21}x_2$. Összeszorozva és $x_1x_2 \neq 0$-val egyszerűsítve: $(\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) = m_{12}m_{21} > 0$. Tegyük föl, hogy $m_{11} \geq m_{22}$. Ekkor $\lambda_2 \leq m_{22} \leq m_{11} \leq \lambda_1$. Domináns pozitív gyökhöz tartozó sajátvektorra: $s_{1,1}/s_{2,1} = m_{12}/(\lambda_1 - m_{11}) > 0$. A másik sajátvektorra: $s_{1,2}/s_{2,2} = m_{12}/(\lambda_2 - m_{11}) < 0$.

c) Mivel a diszkrimináns pozitív, a két sajátérték különböző.

d) $2\rho(M) = m_{11} + m_{22} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}$, azaz $\rho(M)$ növekvő függvénye m_{12}-nek és m_{21}-nek. A négyzetgyök-függvény konkavitása miatt a $0 \leq m_{11} \leq m_{22}$ intervallumban m_{11} növekedésével párhuzamosan a diszkrimináns lassabban nő, mint $|m_{11} - m_{22}|$.

e) Szükségünk lesz a $P(\lambda) = (\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) - m_{12}m_{21}$ karakteriszikus polinomra. Az adjungált mátrix segítségével az $(I - M)$ inverze a következőképpen fejezhető ki:

$$(I - M)^{-1} = P(-1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & 1 - m_{11} \end{pmatrix}.$$

Ha M stabil, akkor $P(1) > 0$. A fentiek szerint $m_{ii} \leq \lambda_1 < 1$, tehát $(I - M)^{-1} > 0$.

4.2. feladat. M_1 irreducíbilis, 2-ciklikus; M_2 irreducíbilis; M_3 reducíbilis ; M_4 pozitív.

5.1. feladat.

$$(I-M)^{-1} = \delta \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad x^{\mathrm{o}} = \delta \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix},$$

ahol $\delta = 1/(1-\alpha\beta)$.

5.1. feladat. Az M mátrix j-edik oszlopa a j-edik egységvektor képét mutatja, tehát nagyítás és forgatás kombinálódik. A karakterisztikus egyenlet $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho(\cos\varphi)\lambda + \rho^2$, ahonnan a sajátértékek adódnak.

5.3. feladat. a) Középiskolai fizikából ismert az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő-függvénye. b) Síkbeli differenciálegyenletünk van:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

s ez éppen a Jordan-alak, sajátértéke $\lambda_{1,2} = 0$, és csak egy független sajátvektora van. N-nel jelölve az együttható-mátrixot, könnyű belátni, hogy

$$e^{Nt} = I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

azaz $x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t$.

5.4. feladat. Az 5.6. tételből látható, hogy a rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha $e^{\lambda_j t}$ aszimptotikusan tart nullához, azaz $\mathbf{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

6.1. feladat. a) $f(x) > x$, bár $0 \le f'(x) = 1 - (1+e^x)^{-2}e^x < 1$.

b) A $(-\infty,\infty)$ intervallum nem kompakt.

6.2. feladat. a) A leképezés valóban nem kontrakció, hiszen $\beta = 1$ és $x_0 = 0{,}01$ esetén $x_1 = 50{,}005$, míg $y_0 = 1$ esetén $y_1 = 1$.

b) A számtani és mértani közép összehasonlításából adódik, hogy $x_t \ge \sqrt{\beta}$ $(t \ge 1)$. Ekkor viszont $0 < f'(x) = 1/2 - \beta/(2x^2) < 1$, tehát kontrakció. Vegyük észre, hogy $f'(\sqrt{\beta}) = 0$, azaz a konvergencia nagyon gyors.

6.3. feladat. a) $x^{\mathrm{o}} = 2 - 2x^{\mathrm{o}} \Rightarrow x^{\mathrm{o}} = 2/3$. b) $x_2 = 2x_1$ és $x_1 = 2 - 2x_2 = 2 - 4x_1 \Rightarrow x_1 = 2/5 \Rightarrow x_2 = 4/5$. c) Két pont van az egyik ágon, egy pont a másik ágon. Feltehető, hogy az első kettő kisebb 1/2, illetve nagyobb 1/2. Számolással. d) Instabil, mert $|f'(\cdot)| \ge 2$, 4, illetve $8 \ge 1$.

6.4–6.6. feladat. Programozás

7.1.–7.2. feladat. Programozás

7.3. feladat. A megfelelő átmeneti mátrix

$$M = \begin{pmatrix} 1-\delta & \alpha\delta \\ \alpha\delta & 1-\delta \end{pmatrix},$$

amelynek karakterisztikus polinomja

$$\lambda = \lambda^2 - 2(1-\delta)\lambda + (1-\delta)^2 - \alpha^2\delta^2 = 0.$$

A két sajátérték $\lambda_{1,2} = 1 - \delta \pm \alpha\delta$. Könnyű belátni, hogy $0 \le \delta \le 1$ esetén $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ és $\delta > 1$ esetén fordítva. Mivel mindkét sajátérték csökkenő függvénnye δ-nak, ezért kettőjük maximuma $\delta = 1$-nél minimális.

8.1. feladat. a) Elemi megoldás: $f(t,x,\dot{x}) = \sqrt{1+\dot{x}^2} \ge 1$.

b) Szabványos megoldás: a hiányos alapfüggvény legegyszerűbb esetét alkalmazva: $f_{\dot{x}}(t,\dot{x}) = c$, azaz $\dot{x}/\sqrt{1+\dot{x}^2} = c$, ezért $\dot{x} = k$, azaz $x \equiv 0$.

9.1. feladat. a) $l_1 f_1 \nu^{-1} = 1$ azaz $\nu = l_1 f_1$.

b)–d)

9.2. táblázat *A demográfiai átmenet sémája*

Időszak	Gyermekek s	Dolgozók z	Idősek á	Teljes népesség a	függőségi arány
b) $f_1 = 2$					
0	4	2	1	7	2,5
1	8	4	2	14	2,5
c) vagy $f_1' = 1$					
2	8	8	4	20	3
3	8	8	8	24	2
d) vagy $f_1'' = 1/2$					
2	4	8	4	16	1
3	2	4	8	14	2,5

9.2. feladat. a) Legyen $b_t = b_0\lambda^t$, amelyet behelyettesítve a születési egyenletbe, $b_0\lambda^t = f_1 b_0 \lambda^{t-1} + f_2 b_0 \lambda^{t-2}$ adódik. Egyszerűsítve és rendezve: $\lambda^2 - f_1\lambda - f_2$. Csak az egyik gyök pozitív: $\lambda_1 = (f_1 + \sqrt{f_1^2 + 4f_2})/2$.

b) $\lambda_1 = 1$ pontosan akkor valósul meg, ha $1 - f_1 - f_2 = 0$. A megfelelő kezdeti feltételek: $b_{-1} = b_{-2}$.

c) A gyökök és együtthatók összefüggése szerint ekkor a második sajátérték, $\lambda_2 = -f_2$ a (–1, 0) szakaszra esik, tehát a rendszer stabil.

10.1. feladat. Mérlegeljük a megfelelően módosított egyenletet:

$$\tau_v \sum_{i=R-t+1}^{R} l_i \rho_t^{-i} = b \sum_{j=R+1}^{D} l_j \rho_t^{-j}, \qquad t = 1, \ldots, R, \tag{10.3*}$$

ahol

$$\tau_v \sum_{i=0}^{R} l_i (\nu r)^{-i} = b \sum_{j=R+1}^{D} l_j (\nu r)^{-j}, \tag{10.3**}$$

10.2. feladat. a)

$$\sum_{i=L}^{I} R^{-i}(y_i - m_i c_i) = 0.$$

b) Elhagyva a $\sum_{i=L}^{I} R^{-i} y_i$ állandót, a Lagrange-függvény λ szorzóval

$$L = \sum_{i=L}^{I} [\delta^i m_i u(c_i) - \lambda R^{-i} m_i c_i].$$

Deriválva c_i szerint: $\delta^i m_i u'(c_i) - \lambda R^{-i} m_i = 0$, rendezve: $(\delta R)^i u'(c_i) = \lambda$, $i = L, \ldots, I$. Az ismeretlen λ paraméter függvényében (c_i) kifejezhető, és behelyettesítve a költségvetési korlátba, adódik λ, azaz (c_i).

c) Mivel $c_i < c_{i+1}$ ekvivalens $u'(c_i) > u'(c_{i+1})$-gyel, az optimumfeltétel szerint $(\delta R)^i$ nek nőnie kell, azaz $\delta R > 1$.

d) Speciális hasznosságfüggvényünk esetén $u'(c_i) = c_i^{-\gamma}$, azaz $(\delta R)^i c_i^{-\gamma} = \lambda$, rendezve:

$$c_i = (\delta R)^{i/\gamma} \lambda^{-1/\gamma}, \qquad i = L, L+1, \ldots, I.$$

Behelyettesítve a korlátba:

$$\lambda^{-1/\gamma} \sum_{i=L}^{I} m_i R^{-i} (\delta R)^{i/\gamma} = \sum_{i=L}^{I} R^{-i} y_i = Y.$$

Kifejezve $\lambda^{-1/\gamma}$-t:

$$\lambda^{-1/\gamma} = \frac{\sum_{i=L}^{I} R^{-i} y_i}{\sum_{i=L}^{I} m_i R^{-i} (\delta R)^{i/\gamma}}.$$

e) Ha hitelkorlát létezik, akkor az éves vagyonállományt az

$$a_i = R a_{i-1} + y_i - m_i c_i, \qquad i = L, L+1, \ldots, I$$

differenciaegyenlet írja le, és teljesülnie kell az $a_i \geq 0$ korlátoknak. Bonyolult.

Hivatkozások

AARON, H. J. (1966): „The Social Insurance Paradox”, *Canadian Journal of Economics and Political Science 32*, 371–374. o.

ARNOLD, V. I. (1984): *Közönséges differenciálegyenletek*, (a 2. orosz kiadás fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó 1987.

ARROW, K. J. (1970): *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chicago, Markham.

BRÓDY, A. (1969): *Érték és újratermelés*, Budapest, KJK.

BÖRSCH-SUPAN, A. (2001): „Six Countries – And No Pension System Alike”, *Börsch-Supan–Miegel, szerk.*, 1–12. o.

BÖRSCH-SUPAN, A.–MIEGEL, M., szerk. (2001): *Pension Reform in Six Countries*, Berlin, Springer.

CASS, D. (1965): „Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation”, *Review of Economic Studies 32* 233–240. o.

FORGÓ, F.–PINTÉR, M.–SIMONOVITS, A.–SOLYMOSI, T. (2005): Játékelmélet. http://www.uni-corvinus.hu/ pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf

GIBBONS, R. (1992): *Bevezetés a játékelméletbe,* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2004.

HABLICSEK, L. (1999): „Öregedés és népességcsökkenés: demográfiai forgatókönyvek 1997–2050”, *Demográfia 42*, 390–413. o.

HEGEDŰS, M.–ZALAI, E. (1978): *Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben*, Budapest, KJK.

HICKS, J. (1950): *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, Oxford, Clarendon.

HOLZMANN, R. (1998) „Financing the Transition to Multi-pillar [Systems]”, HDNSP for Social Protection Discussion Series.

HOMMES, C. H. (1991): *Chaotic Dynamics in Economic Models: Some Simple Case-Studies*, Groningen Theses in Economics, Management and Organization, Groningen, Wolters-Nordhoff.

HOTELLING, H. (1929): „Stability of Competition”, *Economic Journal 39* 41–57. o.

KEYNES, J. M. (1936): *A foglalkoztatás, a kamat és a pénz általános elmélete*, Budapest, KJK, 1965.

KOOPMANS, T. C. (1965): „On the Concept of Optimal Economic Growth”, *Semain d'Etude sur le Role de l'Analyse Econometrique dans la Formulation due Plans de Dévelopment*, Vatikán, A Pápai Tudományos Akadémia, I. kötet, 225–287. o.

KORNAI, J. és MARTOS, B. (1971): „Gazdasági rendszerek vegetatív működése”, *Szigma 4* 34–50. o.

KÓSA, A. (1973): *Variációszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó.
KURIHARA, K. K., szerk. (1954): *Post-Keynesian Economics*, New Brunswick, Rutgers University Press.
LEONTIEF, W. W. (1941): *The Structure of the American Economy*, New York, Oxford University Press (edition in 1951).
LI, J. A. és YORKE, J. A. (1975): „Period Three Implies Chaos", *American Mathematical Monthly 82* 985–992. o.
LYAPUNOV, A. (1893): *Stability of Motions*, New York, Academic Press (orosz eredeti angol fordítása), 1966.
MÉRŐ, L. (1996): *Mindenki másképp egyforma*, Budapest, Tericum.
MODIGLIANI, F. és BRUMBERG, R. (1954): „Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data", *Kurihara, szerk.* 388–436. o.
NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. (1944): *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.
NEUMANN, J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, 1965.
NIKAIDO, H.–ISODA, K. (1955): „Note on Noncooperative Convex Games", *Pacific Journal of Mathematics 5* 807–815. o.
RÉNYI, A. (1966): *Valószínűségszámítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
SALANT, S.–SWITZER, S.–REYNOLDS, R. (1983): „Losses from Horizontal Mergers: The Effects of an Exogenous Change in Industry Structure on Cournot–Nash Equilibrium", *Quarterly Journal of Equilibrium 98* 185–199. o.
SÁRKOVSZKIJ, A. N. (1964): „Egy olyan folytonos leképezés együttélő ciklusai, amely az egyenest önmagára képezi le", *Ukrán Matematikai Folyóirat 16*, 61–71. o., orosz eredeti angol fordítása: Stefan (1977).
SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Budapest, KJK.
SIMONOVITS, A. (2002): *Nyugdíjrendszerek: tények és modellek*, Budapest, Typotex.
SIMONYI, K. (1981): *A fizika kultúrtörténete*, Budapest, Gondolat, 2., bővített kiadás.
SZATMÁRI. A. (1996): „Aukciók, avagy a képbe kerül, ha a Louvre a képbe kerül?", *Közgazdasági Szemle 43* 303–314. o.
SZÉPFALUSSY, P. és TÉL, T., szerk. (1982): *Véletlenszerű jelenségek nemlineáris rendszerekben: a káosz*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
THOMPSON, L. (1998): *Older and Wiser: The Economics of Public Pension*, Washington D. C., The Urban Institute Press.
VINCZE, J. (1991) „Fejezetek az információ közgazdaságtanából: I. A morális kockázat, II. A kontraszelekció, III. Morális kockázat és kontraszelekció az időben", *Közgazdasági Szemle 37* 134–152, 289–306 és 435–445. o.
ZALAI, E. (1989): *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, KJK.