2. előadás: Komplex számok 1.

A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes/imaginárius egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.
A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.
Minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes/imaginárius egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.
A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.
Minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes/imaginárius egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.

A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.

Minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes/imaginárius egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.
A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.
Minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes/imaginárius egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.
A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.
Minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

A KOMPLEX SZÁMOK HALMAZA

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes/imaginárius egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.
A komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.
Minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

ALGEBRAI ALAK, VALÓS ÉS KÉPZETES RÉSZ

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.
Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

A $0 \in \mathbb{C}$ komplex szám:

$$0 = 0 + 0i.$$

Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

ALGEBRAI ALAK, VALÓS ÉS KÉPZETES RÉSZ

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.
Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

A $0 \in \mathbb{C}$ komplex szám:

$$0 = 0 + 0i.$$

Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

ALGEBRAI ALAK, VALÓS ÉS KÉPZETES RÉSZ

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.
Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

A $0 \in \mathbb{C}$ komplex szám:

$$0 = 0 + 0i.$$

Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

ALGEBRAI ALAK, VALÓS ÉS KÉPZETES RÉSZ

Legyen
$$z = a + bi$$
tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.

Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:
$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

A $0 \in \mathbb{C}$ komplex szám:
$$0 = 0 + 0i.$$

Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha
$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

ALGEBRAI ALAK, VALÓS ÉS KÉPZETES RÉSZ

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.
Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

A $0 \in \mathbb{C}$ komplex szám:

$$0 = 0 + 0i.$$

Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

ALGEBRAI ALAK, VALÓS ÉS KÉPZETES RÉSZ

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.
Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

A $0 \in \mathbb{C}$ komplex szám:

$$0 = 0 + 0i.$$

Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS ELLENTETTJE

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbb{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z ellentettje. Konkrétan,

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z).$$

KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS ELLENTETTJE

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbb{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z ellentettje. Konkrétan,

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z).$$

KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS ELLENTETTJE

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbb{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z ellentettje. Konkrétan,

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z).$$

KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS ELLENTETTJE

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbb{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z ellentettje. Konkrétan,

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z).$$

KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS ELLENTETTJE

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbb{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z **ellentettje**. Konkrétan,

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z).$$

KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS ELLENTETTJE

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w).$$

Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbb{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z ellentettje. Konkrétan,

$$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z).$$

KOMPLEX SZÁMOK SZORZÁSA

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w szorzata:

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

KOMPLEX SZÁMOK SZORZÁSA

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w szorzata:

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

KOMPLEX SZÁMOK SZORZÁSA

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w szorzata:

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

KOMPLEX SZÁMOK SZORZÁSA

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w szorzata:

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Komplex számok szorzása

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w szorzata:

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen
$$z = a + bi$$
tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:
$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX KONJUGÁLÁS, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

MEGJEGYZÉS

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor a fent definiált abszolút érték egybeesik a kžépiskolában definiált abszolút értékkel.

KOMPLEX SZÁMOK INVERZE, OSZTÁS

Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Ebből most a létezést látjuk be. Ha $z = a + bi$, akkor

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

megfelel:

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) =$$
$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i} =$$
$$= 1.$$

KOMPLEX SZÁMOK INVERZE, OSZTÁS

Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Ebből most a létezést látjuk be. Ha $z = a + bi$, akkor

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

megfelel:

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i} =$$

$$= 1.$$

KOMPLEX SZÁMOK INVERZE, OSZTÁS

Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Ebből most a létezést látjuk be. Ha $z = a + b\mathrm{i}$, akkor

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

megfelel:

$$(a+b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i} =$$

$$= 1.$$

KOMPLEX SZÁMOK INVERZE, OSZTÁS

Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Ebből most a létezést látjuk be. Ha $z = a + bi$, akkor

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

megfelel:

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)i =$$

$$= 1.$$

KOMPLEX SZÁMOK INVERZE, OSZTÁS

Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Ebből most a létezést látjuk be. Ha $z = a + bi$, akkor

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

megfelel:

$$(a+b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i} =$$

$$= 1.$$

KOMPLEX SZÁMOK INVERZE, OSZTÁS

Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Ebből most a létezést látjuk be. Ha $z = a + b\mathrm{i}$, akkor

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

megfelel:

$$(a+b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i} =$$

$$= 1.$$

PÃ©LDA

Az osztás az eddigi műveletekre vezethető vissza: $w \neq 0$-ra

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

PÉLDA

Legyen $z = 3 - 2i$ *és* $w = -1 + i$*. Ekkor*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= 3, \quad \mathrm{Im}(z) = -2, \quad \bar{z} = 3 + 2i; \\ \mathrm{Re}(w) &= -1, \quad \mathrm{Im}(w) = 1, \quad \bar{w} = -1 - i. \end{aligned}$$

PÃ©LDA

Az osztás az eddigi műveletekre vezethető vissza: $w \neq 0$-ra

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

PÉLDA

Legyen $z = 3 - 2i$ és $w = -1 + i$. Ekkor

$$\operatorname{Re}(z) = 3, \quad \operatorname{Im}(z) = -2, \quad \bar{z} = 3 + 2i;$$
$$\operatorname{Re}(w) = -1, \quad \operatorname{Im}(w) = 1, \quad \bar{w} = -1 - i.$$

PÃ©LDA

Az osztás az eddigi műveletekre vezethető vissza: $w \neq 0$-ra

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

PÉLDA

Legyen $z = 3 - 2i$ *és* $w = -1 + i$. *Ekkor*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= 3, \quad \mathrm{Im}(z) = -2, \quad \bar{z} = 3 + 2i; \\ \mathrm{Re}(w) &= -1, \quad \mathrm{Im}(w) = 1, \quad \bar{w} = -1 - i. \end{aligned}$$

PÃ©LDA

Az osztás az eddigi műveletekre vezethető vissza: $w \neq 0$-ra

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

PÉLDA

Legyen $z = 3 - 2i$ és $w = -1 + i$. Ekkor

$$\mathrm{Re}(z) = 3, \quad \mathrm{Im}(z) = -2, \quad \bar{z} = 3 + 2i;$$

$$\mathrm{Re}(w) = -1, \quad \mathrm{Im}(w) = 1, \quad \bar{w} = -1 - i.$$

PÃ©LDA

Az osztás az eddigi műveletekre vezethető vissza: $w \neq 0$-ra

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

PÉLDA

Legyen $z = 3 - 2i$ és $w = -1 + i$. Ekkor

$$\mathrm{Re}(z) = 3, \quad \mathrm{Im}(z) = -2, \quad \bar{z} = 3 + 2i;$$
$$\mathrm{Re}(w) = -1, \quad \mathrm{Im}(w) = 1, \quad \bar{w} = -1 - i.$$

PÃ©LDA

Példa

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} = \frac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3 - i - 2}{1 + 1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3-2i}{-1+i} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-3-3i+2i+2i^2}{(-1)^2-i^2} =$$

$$= \frac{-3-i-2}{1+1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3-2i}{-1+i} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-3-3i+2i+2i^2}{(-1)^2-i^2} =$$

$$= \frac{-3-i-2}{1+1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} = \frac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3 - i - 2}{1 + 1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} = \frac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3 - i - 2}{1 + 1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} = \frac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3 - i - 2}{1 + 1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} = \frac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3 - i - 2}{1 + 1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

PÃ©LDA

PÉLDA

$$z + w = (3 - 2i) + (-1 + i) = (3 + (-1)) + (-2 + 1)i = 2 - i,$$

$$z - w = (3 - 2i) - (-1 + i) = 4 - 3i,$$

$$z \cdot w = (3-2i)(-1+i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = -1+5i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} = \frac{(3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-3 - i - 2}{1 + 1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

Komplex számok műveleti azonosságai

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

KOMPLEX SZÁMOK MŰVELETI AZONOSSÁGAI

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

Műveleti azonosság bizonyítása

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}} = \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i} \\ &= (ac-(-b)(-d))+(a(-d)+(-b)c)\mathrm{i} \\ &= (a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i}) \\ &= \bar{z}\bar{w}.\end{aligned}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$
\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}} = \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \\
&= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)\mathrm{i} \\
&= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\
&= \bar{z}\bar{w}.
\end{aligned}
$$

MŰVELETI AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}} = \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i} \\ &= (ac-(-b)(-d))+(a(-d)+(-b)c)\mathrm{i} \\ &= (a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i}) \\ &= \bar{z}\bar{w}.\end{aligned}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}} = \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \\
&= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)\mathrm{i} \\
&= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\
&= \bar{z}\bar{w}.
\end{aligned}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}} = \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i} \\ &= (ac-(-b)(-d))+(a(-d)+(-b)c)\mathrm{i} \\ &= (a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i}) \\ &= \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}} = \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \\
&= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)\mathrm{i} \\
&= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\
&= \bar{z}\bar{w}.
\end{aligned}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}} = \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \\
&= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)\mathrm{i} \\
&= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\
&= \bar{z}\bar{w}.
\end{aligned}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$
\begin{aligned}
|zw|^2 &= zw\overline{zw} \\
&= zw\bar{z}\bar{w} \\
&= z\bar{z}w\bar{w} \\
&= |z|^2|w|^2.
\end{aligned}
$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$
\begin{aligned}
|zw|^2 &= zw\overline{zw} \\
&= zw\bar{z}\bar{w} \\
&= z\bar{z}w\bar{w} \\
&= |z|^2|w|^2.
\end{aligned}
$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$
\begin{aligned}
|zw|^2 &= zw\overline{zw} \\
&= zw\bar{z}\bar{w} \\
&= z\bar{z}w\bar{w} \\
&= |z|^2|w|^2.
\end{aligned}
$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2 \left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2 \left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned}|zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

MŰVELETI AZONOSSÁG KÖVETKEZMÉNYE

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből $|zw| = |z| \cdot |w|$, továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2 \left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

Komplex számok ábrázolása

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbb{C}$ számnak a

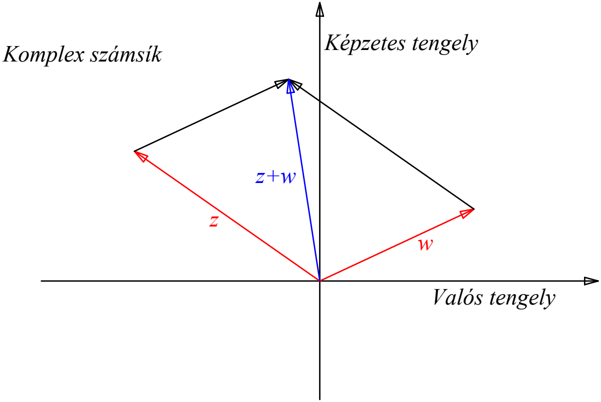
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pontot (vagy a pont helyvektorát).

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.

KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA



1: valós egység
i: képzetes egység.