3. ELŐADÁS: KOMPLEX SZÁMOK 2.

KOMPLEX SZÁMOK MEGADÁSA

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ egy algebrai alakban adott komplex szám.

Kérdés:

A valós és a képzetes rész mellett milyen adatokkal lehet még meghatározni z-t?

EMLÉKEZTETŐ

A z komplex szám abszolút értéke a z-t reprezentáló helyvektor hossza, azaz a fenti alakban

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

KOMPLEX SZÁMOK MEGADÁSA

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ egy algebrai alakban adott komplex szám.

Kérdés:

A valós és a képzetes rész mellett milyen adatokkal lehet még meghatározni z-t?

EMLÉKEZTETŐ

A z komplex szám abszolút értéke a z-t reprezentáló helyvektor hossza, azaz a fenti alakban

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

KOMPLEX SZÁMOK MEGADÁSA

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ egy algebrai alakban adott komplex szám.

Kérdés:

A valós és a képzetes rész mellett milyen adatokkal lehet még meghatározni z-t?

EMLÉKEZTETŐ

A z komplex szám abszolút értéke a z-t reprezentáló helyvektor hossza, azaz a fenti alakban

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

KOMPLEX SZÁMOK MEGADÁSA

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ egy algebrai alakban adott komplex szám.

Kérdés:

A valós és a képzetes rész mellett milyen adatokkal lehet még meghatározni z-t?

EMLÉKEZTETŐ

A z komplex szám abszolút értéke a z-t reprezentáló helyvektor hossza, azaz a fenti alakban

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Komplex számok megadása

Definíció

A $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám irányszögének vagy argumentumának nevezzük azt a $\varphi \in \mathbb{R}$ szöget, amellyel az x-tengely pozitív felét elforgatva a 0 kezdőpontú, a z-nek megfelelő ponton keresztül haladó félegyeneshez jutunk.

Jelölés:

$$\varphi = \arg(z).$$

Fontos észrevétel: az $\arg(z)$ értéke csupán $2n\pi$ (ahol $n \in \mathbb{Z}$) alakú számok hozzáadása erejéig jól meghatározott.

KOMPLEX SZÁMOK MEGADÁSA

DEFINÍCIÓ

A $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám irányszögének vagy argumentumának nevezzük azt a $\varphi \in \mathbb{R}$ szöget, amellyel az x-tengely pozitív felét elforgatva a 0 kezdőpontú, a z-nek megfelelő ponton keresztül haladó félegyeneshez jutunk.

Jelölés:

$$\varphi = \arg(z).$$

Fontos észrevétel: az $\arg(z)$ értéke csupán $2n\pi$ (ahol $n \in \mathbb{Z}$) alakú számok hozzáadása erejéig jól meghatározott.

Komplex számok megadása

Definíció

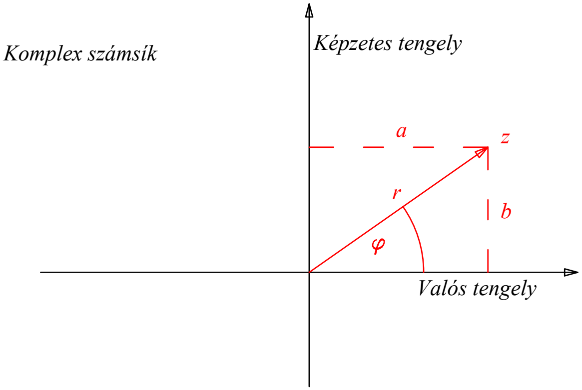
A $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám irányszögének vagy argumentumának nevezzük azt a $\varphi \in \mathbb{R}$ szöget, amellyel az x-tengely pozitív felét elforgatva a 0 kezdőpontú, a z-nek megfelelő ponton keresztül haladó félegyeneshez jutunk.

Jelölés:

$$\varphi = \arg(z).$$

Fontos észrevétel: az $\arg(z)$ értéke csupán $2n\pi$ (ahol $n \in \mathbb{Z}$) alakú számok hozzáadása erejéig jól meghatározott.

Komplex számok megadása



KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIAI ALAKJA, KONJUGÁLÁS

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.
Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)i\right).$$

KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIAI ALAKJA, KONJUGÁLÁS

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.
Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)i\right).$$

Komplex szám trigonometriai alakja, konjugálás

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.
Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right).$$

KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIAI ALAKJA, KONJUGÁLÁS

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.
Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right).$$

KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIAI ALAKJA, KONJUGÁLÁS

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.

Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right).$$

KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIAI ALAKJA, KONJUGÁLÁS

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.
Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right).$$

KOMPLEX SZÁM TRIGONOMETRIAI ALAKJA, KONJUGÁLÁS

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z|\cos(\varphi), \quad b = |z|\sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ez $z \in \mathbb{C}$ trigonometriai alakja.
Minthogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right).$$

SZORZÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyenek

$$z_1 = r_1\,(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\mathrm{i}) \qquad z_2 = r_2\,(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\mathrm{i})$$

trigonometriai alakban adott nem 0 komplex számok. Belátjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\mathrm{i})\,.$$

Valóban, már láttuk, hogy

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ez következik abból, hogy a $(0, 1, z_1)$ és $(0, z_2, z_1 z_2)$ csúcsú háromszögek hasonlóak, mert a második háromszög oldalhosszai rendre r_2-szeresei az első háromszög megfelelő oldalainak.

SZORZÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyenek

$$z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\mathrm{i}) \qquad z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\mathrm{i})$$

trigonometriai alakban adott nem 0 komplex számok. Belátjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\mathrm{i}) .$$

Valóban, már láttuk, hogy

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ez következik abból, hogy a $(0, 1, z_1)$ és $(0, z_2, z_1 z_2)$ csúcsú háromszögek hasonlóak, mert a második háromszög oldalhosszai rendre r_2-szeresei az első háromszög megfelelő oldalainak.

SZORZÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyenek

$$z_1 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\mathrm{i}\right) \qquad z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\mathrm{i}\right)$$

trigonometriai alakban adott nem 0 komplex számok. Belátjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

Valóban, már láttuk, hogy

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ez következik abból, hogy a $(0, 1, z_1)$ és $(0, z_2, z_1 z_2)$ csúcsú háromszögek hasonlóak, mert a második háromszög oldalhosszai rendre r_2-szeresei az első háromszög megfelelő oldalainak.

SZORZÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyenek

$$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \quad z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i)$$

trigonometriai alakban adott nem 0 komplex számok. Belátjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)i) .$$

Valóban, már láttuk, hogy

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ez következik abból, hogy a $(0, 1, z_1)$ és $(0, z_2, z_1 z_2)$ csúcsú háromszögek hasonlóak, mert a második háromszög oldalhosszai rendre r_2-szeresei az első háromszög megfelelő oldalainak.

SZORZÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyenek

$$z_1 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\mathrm{i}\right) \quad z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\mathrm{i}\right)$$

trigonometriai alakban adott nem 0 komplex számok. Belátjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

Valóban, már láttuk, hogy

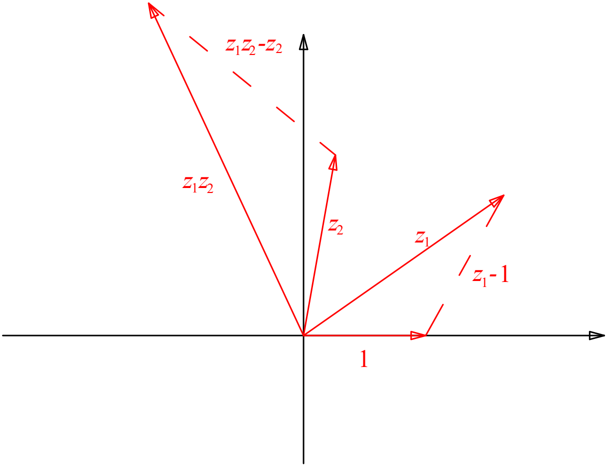
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ez következik abból, hogy a $(0, 1, z_1)$ és $(0, z_2, z_1 z_2)$ csúcsú háromszögek hasonlóak, mert a második háromszög oldalhosszai rendre r_2-szeresei az első háromszög megfelelő oldalainak.

SZORZÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN



INVERZ-SZÁMÍTÁS ÉS OSZTÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0.$$

Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right),$$

amint az azonnal következik a szorzás alakjából:

$$1 = 1(\cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}) = rr^{-1}\left(\cos(\varphi - \varphi) + \sin(\varphi - \varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ebből eddigi jelöléseinkkel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

INVERZ-SZÁMÍTÁS ÉS OSZTÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0.$$

Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right),$$

amint az azonnal következik a szorzás alakjából:

$$1 = 1(\cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}) = rr^{-1}\left(\cos(\varphi - \varphi) + \sin(\varphi - \varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ebből eddigi jelöléseinkkel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

Inverz-számítás és osztás trigonometriai alakban

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0.$$

Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right),$$

amint az azonnal következik a szorzás alakjából:

$$1 = 1(\cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}) = rr^{-1}\left(\cos(\varphi - \varphi) + \sin(\varphi - \varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ebből eddigi jelöléseinkkel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

INVERZ-SZÁMÍTÁS ÉS OSZTÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0.$$

Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right),$$

amint az azonnal következik a szorzás alakjából:

$$1 = 1(\cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}) = rr^{-1}\left(\cos(\varphi - \varphi) + \sin(\varphi - \varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ebből eddigi jelöléseinkkel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

INVERZ-SZÁMÍTÁS ÉS OSZTÁS TRIGONOMETRIAI ALAKBAN

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0.$$

Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right),$$

amint az azonnal következik a szorzás alakjából:

$$1 = 1(\cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}) = rr^{-1}\left(\cos(\varphi - \varphi) + \sin(\varphi - \varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ebből eddigi jelöléseinkkel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

Hatványozás (de Moivre-képlet)

Ha

$$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}) \neq 0,$$

és $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$z^n = r^n\,(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)\mathrm{i})\,.$$

Bizonyítás: $n > 0$-ra teljes indukcióval z trigonometriai alakjából a szorzás szabályának segítségével; $n < 0$-ra teljes indukcióval z^{-1} trigonometriai alakjából.

HATVÁNYOZÁS (DE MOIVRE-KÉPLET)

Ha

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0,$$

és $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Bizonyítás: $n > 0$-ra teljes indukcióval z trigonometriai alakjából a szorzás szabályának segítségével; $n < 0$-ra teljes indukcióval z^{-1} trigonometriai alakjából.

HATVÁNYOZÁS (DE MOIVRE-KÉPLET)

Ha

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0,$$

és $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Bizonyítás: $n > 0$-ra teljes indukcióval z trigonometriai alakjából a szorzás szabályának segítségével; $n < 0$-ra teljes indukcióval z^{-1} trigonometriai alakjából.

Komplex n-edik gyökök

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0$$

rögzített, és keressük az összes olyan

$$w = t\left(\cos(\psi) + \sin(\psi)\mathrm{i}\right)$$

komplex számot, amelyre

$$w^n = z.$$

Az ilyen $w \in \mathbb{C}$ számok neve: z komplex n-edik gyökei.

KOMPLEX n-EDIK GYÖKÖK

Legyen

$$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}) \neq 0$$

rögzített, és keressük az összes olyan

$$w = t\,(\cos(\psi) + \sin(\psi)\mathrm{i})$$

komplex számot, amelyre

$$w^n = z.$$

Az ilyen $w \in \mathbb{C}$ számok neve: z komplex n-edik gyökei.

KOMPLEX n-EDIK GYÖKÖK

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0$$

rögzített, és keressük az összes olyan

$$w = t\left(\cos(\psi) + \sin(\psi)\mathrm{i}\right)$$

komplex számot, amelyre

$$w^n = z.$$

Az ilyen $w \in \mathbb{C}$ számok neve: z komplex n-edik gyökei.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA

Minden $z \neq 0$ komplex számnak n különböző komplex n-edik gyöke van, amelyek abszolút értéke és argumentuma:

$$t = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

ahol $0 \leq k \leq n-1$.

Egy $z \neq 0$ komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szög csúcsai, melynek középpontja 0.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA

Minden $z \neq 0$ komplex számnak n különböző komplex n-edik gyöke van, amelyek abszolút értéke és argumentuma:

$$t = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

ahol $0 \leq k \leq n-1$.

Egy $z \neq 0$ komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szög csúcsai, melynek középpontja 0.

Az n-edik gyökök trigonometriai alakja

Minden $z \neq 0$ komplex számnak n különböző komplex n-edik gyöke van, amelyek abszolút értéke és argumentuma:

$$t = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

ahol $0 \leq k \leq n-1$.

Egy $z \neq 0$ komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szög csúcsai, melynek középpontja 0.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA

Minden $z \neq 0$ komplex számnak n különböző komplex n-edik gyöke van, amelyek abszolút értéke és argumentuma:

$$t = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

ahol $0 \leq k \leq n - 1$.

Egy $z \neq 0$ komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szög csúcsai, melynek középpontja 0.

Az n-edik gyökök trigonometriai alakja, bizonyítás

A de Moivre-képlet értelmében,

$$w^n = t^n \left(\cos(n\psi) + \sin(n\psi)\mathrm{i}\right).$$

Ahhoz, hogy $w^n = z$ legyen, pontosan az kell, hogy $t^n = r$ és

$$n\psi - \varphi = 2k\pi$$

teljesüljön valamely $k \in \mathbb{Z}$-ra, vagyis

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Azonban k-t $(k + n)$-re cserélve ebben a képletben, ugyanazt a $w \in \mathbb{C}$ gyököt kapjuk. A különböző gyököket tehát pl. a $0 \leq k \leq n - 1$ értékek származtatják.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA, BIZONYÍTÁS

A de Moivre-képlet értelmében,

$$w^n = t^n (\cos(n\psi) + \sin(n\psi)\mathrm{i}) .$$

Ahhoz, hogy $w^n = z$ legyen, pontosan az kell, hogy $t^n = r$ és

$$n\psi - \varphi = 2k\pi$$

teljesüljön valamely $k \in \mathbb{Z}$-ra, vagyis

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Azonban k-t $(k + n)$-re cserélve ebben a képletben, ugyanazt a $w \in \mathbb{C}$ gyököt kapjuk. A különböző gyököket tehát pl. a $0 \leq k \leq n - 1$ értékek származtatják.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA, BIZONYÍTÁS

A de Moivre-képlet értelmében,

$$w^n = t^n \left(\cos(n\psi) + \sin(n\psi)\mathrm{i}\right).$$

Ahhoz, hogy $w^n = z$ legyen, pontosan az kell, hogy $t^n = r$ és

$$n\psi - \varphi = 2k\pi$$

teljesüljön valamely $k \in \mathbb{Z}$-ra, vagyis

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Azonban k-t $(k+n)$-re cserélve ebben a képletben, ugyanazt a $w \in \mathbb{C}$ gyököt kapjuk. A különböző gyököket tehát pl. a $0 \le k \le n-1$ értékek származtatják.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA, BIZONYÍTÁS

A de Moivre-képlet értelmében,

$$w^n = t^n \left(\cos(n\psi) + \sin(n\psi)\mathrm{i}\right).$$

Ahhoz, hogy $w^n = z$ legyen, pontosan az kell, hogy $t^n = r$ és

$$n\psi - \varphi = 2k\pi$$

teljesüljön valamely $k \in \mathbb{Z}$-ra, vagyis

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Azonban k-t $(k+n)$-re cserélve ebben a képletben, ugyanazt a $w \in \mathbb{C}$ gyököt kapjuk. A különböző gyököket tehát pl. a $0 \leq k \leq n-1$ értékek származtatják.

AZ n-EDIK GYÖKÖK TRIGONOMETRIAI ALAKJA, BIZONYÍTÁS

A de Moivre-képlet értelmében,

$$w^n = t^n \left(\cos(n\psi) + \sin(n\psi)\mathrm{i}\right).$$

Ahhoz, hogy $w^n = z$ legyen, pontosan az kell, hogy $t^n = r$ és

$$n\psi - \varphi = 2k\pi$$

teljesüljön valamely $k \in \mathbb{Z}$-ra, vagyis

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Azonban k-t $(k+n)$-re cserélve ebben a képletben, ugyanazt a $w \in \mathbb{C}$ gyököt kapjuk. A különböző gyököket tehát pl. a $0 \leq k \leq n-1$ értékek származtatják.

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-i)^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg} \phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1 - i$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-i)^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + i\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020}=?$$

$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\phi=1 \implies \phi=\frac{\pi}{4}$ vagy $\phi=\frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi=\frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right)=$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right)=-2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

Példa trigonometrikus alak használatára

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg} \phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$. De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\quad \mathrm{tg}\,\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$. De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\phi = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = \frac{5\pi}{4}$.
De $-1-\mathrm{i}$ a 3. negyedben van, tehát $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Ebből

$$(-1-\mathrm{i})^{2020} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{2020} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2020}\left(\cos\frac{5\pi\cdot 2020}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi\cdot 2020}{4}\right) =$$

$$2^{1010}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{1010}.$$

Példa trigonometrikus alak használatára

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2;\quad \operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.

De $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241\mathrm{i} \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2;$ $\operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.

De $-1+\sqrt{3}i$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241i \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.

De $-1+\sqrt{3}i$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241i \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}=?$$

$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2;\quad \operatorname{tg}\phi=-\sqrt{3}\Longrightarrow\phi=-\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi=\frac{2\pi}{3}$.

De $-1+\sqrt{3}i$ a 2. negyedben van, tehát $\phi=\frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}=\begin{cases}\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\approx 0.965+0.810i\\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)\approx -1.184+0.431i\\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)\approx -0.219-1.241i\end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\quad \mathrm{tg}\, \phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.
De $-1 + \sqrt{3}i$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241i \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.
De $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241\mathrm{i} \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\quad \operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.
De $-1+\sqrt{3}i$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241i \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\quad \operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.
De $-1+\sqrt{3}i$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431i \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241i \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2;\quad \operatorname{tg}\phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.
De $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241\mathrm{i} \end{cases}$$

PÉLDA TRIGONOMETRIKUS ALAK HASZNÁLATÁRA

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = ?$$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg} \phi = -\sqrt{3} \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = \frac{2\pi}{3}$.
De $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ a 2. negyedben van, tehát $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Ebből a képletbe behelyettesítve:

$$\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \approx 0.965 + 0.810\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{9}\right) \approx -1.184 + 0.431\mathrm{i} \\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}\right) \approx -0.219 - 1.241\mathrm{i} \end{cases}$$

POLINOMOK ÉS GYÖKEIK

Legyen

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n$$

egy nem azonosan 0 komplex együtthatós n-edfokú polinom (azaz, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$). Egy $w_0 \in \mathbb{C}$ gyöke P-nek, ha $P(w_0) = 0$. Megmutatható, hogy ha w_0 gyöke P-nek, akkor létezik olyan Q polinom, amelyre

$$P(w) = (w - w_0)Q(w).$$

Láttuk: minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén a

$$w^n - z$$

polinomnak w-ben n különböző gyöke van. Ellenben, $z = 0$ esetén a

$$w^n$$

polinomnak mindössze $w_0 = 0$ a gyöke.

POLINOMOK ÉS GYÖKEIK

Legyen

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n$$

egy nem azonosan 0 komplex együtthatós n-edfokú polinom (azaz, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$). Egy $w_0 \in \mathbb{C}$ gyöke P-nek, ha $P(w_0) = 0$. Megmutatható, hogy ha w_0 gyöke P-nek, akkor létezik olyan Q polinom, amelyre

$$P(w) = (w - w_0)Q(w).$$

Láttuk: minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén a

$$w^n - z$$

polinomnak w-ben n különböző gyöke van. Ellenben, $z = 0$ esetén a

$$w^n$$

polinomnak mindössze $w_0 = 0$ a gyöke.

POLINOMOK ÉS GYÖKEIK

Legyen

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n$$

egy nem azonosan 0 komplex együtthatós n-edfokú polinom (azaz, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$). Egy $w_0 \in \mathbb{C}$ gyöke P-nek, ha $P(w_0) = 0$. Megmutatható, hogy ha w_0 gyöke P-nek, akkor létezik olyan Q polinom, amelyre

$$P(w) = (w - w_0)Q(w).$$

Láttuk: minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén a

$$w^n - z$$

polinomnak w-ben n különböző gyöke van. Ellenben, $z = 0$ esetén a

$$w^n$$

polinomnak mindössze $w_0 = 0$ a gyöke.

POLINOMOK ÉS GYÖKEIK

Legyen

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n$$

egy nem azonosan 0 komplex együtthatós n-edfokú polinom (azaz, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$). Egy $w_0 \in \mathbb{C}$ gyöke P-nek, ha $P(w_0) = 0$. Megmutatható, hogy ha w_0 gyöke P-nek, akkor létezik olyan Q polinom, amelyre

$$P(w) = (w - w_0)Q(w).$$

Láttuk: minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén a

$$w^n - z$$

polinomnak w-ben n különböző gyöke van. Ellenben, $z = 0$ esetén a

$$w^n$$

polinomnak mindössze $w_0 = 0$ a gyöke.

POLINOMOK ÉS GYÖKEIK

Legyen

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n$$

egy nem azonosan 0 komplex együtthatós n-edfokú polinom (azaz, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$). Egy $w_0 \in \mathbb{C}$ gyöke P-nek, ha $P(w_0) = 0$. Megmutatható, hogy ha w_0 gyöke P-nek, akkor létezik olyan Q polinom, amelyre

$$P(w) = (w - w_0)Q(w).$$

Láttuk: minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén a

$$w^n - z$$

polinomnak w-ben n különböző gyöke van. Ellenben, $z = 0$ esetén a

$$w^n$$

polinomnak mindössze $w_0 = 0$ a gyöke.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.

Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:

Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke. Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke.
Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke. Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \le m \le n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke.
Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1)\cdots(w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke.
Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke.
Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS AZ ALGEBRA ALAPTÉTELE

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke.
Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

DEFINÍCIÓ

Legyen p egy legalább elsőfokú valós/komplex polinom. Azt mondjuk, hogy p valós/komplex irreducibilis polinom, ha p tetszőleges $p = q_1 \cdot q_2$ felbontásában valós/komplex polinomokra, q_1 vagy q_2 konstans.

PÉLDA

A $p(x) = x^2 - 1$ nem valós irreducibilis, mert $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. A $p(x) = x^2 + 1$ polinom valós irreducibilis, mert ha egy felbontásában nincs konstans tényező, akkor mindkét tényezője elsőfokú, azaz lenne gyöke.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

DEFINÍCIÓ

Legyen p egy legalább elsőfokú valós/komplex polinom. Azt mondjuk, hogy p valós/komplex irreducibilis polinom, ha p tetszőleges $p = q_1 \cdot q_2$ *felbontásában valós/komplex polinomokra,* q_1 *vagy* q_2 *konstans.*

PÉLDA

A $p(x) = x^2 - 1$ *nem valós irreducibilis, mert* $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. *A* $p(x) = x^2 + 1$ *polinom valós irreducibilis, mert ha egy felbontásában nincs konstans tényező, akkor mindkét tényezője elsőfokú, azaz lenne gyöke.*

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

DEFINÍCIÓ

*Legyen p egy legalább elsőfokú valós/komplex polinom. Azt mondjuk, hogy p **valós/komplex irreducibilis polinom**, ha p tetszőleges* $p = q_1 \cdot q_2$ *felbontásában valós/komplex polinomokra,* q_1 *vagy* q_2 *konstans.*

PÉLDA

A $p(x) = x^2 - 1$ *nem valós irreducibilis, mert* $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. *A* $p(x) = x^2 + 1$ *polinom valós irreducibilis, mert ha egy felbontásában nincs konstans tényező, akkor mindkét tényezője elsőfokú, azaz lenne gyöke.*

Irreducibilis polinomok

Definíció

Legyen p egy legalább elsőfokú valós/komplex polinom. Azt mondjuk, hogy p valós/komplex irreducibilis polinom, ha p tetszőleges $p = q_1 \cdot q_2$ felbontásában valós/komplex polinomokra, q_1 vagy q_2 konstans.

Példa

A $p(x) = x^2 - 1$ nem valós irreducibilis, mert $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. A $p(x) = x^2 + 1$ polinom valós irreducibilis, mert ha egy felbontásában nincs konstans tényező, akkor mindkét tényezője elsőfokú, azaz lenne gyöke.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

MEGJEGYZÉS

1. *Az algebra alaptétele szerint a komplex irreducibilis polinomok pontosan a komplex elsőfokú polinomok.*
2. *Valós irreducibilis polinomok a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.*

Vegyük észre, hogy ha p egy valós polinom, akkor a konjugálas tulajdonságai miatt $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ minden z komplex számra. Tehát ha z egy komplex gyöke $p(w)$-nek, akkor $\bar{z}$ is. Másrészt, ha $z = a + bi$, $a, b, \in \mathbb{R}$, akkor

$$(w - z)(w - \bar{z}) = w^2 - 2aw + (a^2 + b^2)$$

egy valós polinom.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

MEGJEGYZÉS

1. *Az algebra alaptétele szerint a komplex irreducibilis polinomok pontosan a komplex elsőfokú polinomok.*
2. *Valós irreducibilis polinomok a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.*

Vegyük észre, hogy ha p egy valós polinom, akkor a konjugálas tulajdonságai miatt $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ minden z komplex számra. Tehát ha z egy komplex gyöke $p(w)$-nek, akkor $\bar{z}$ is. Másrészt, ha $z = a + bi$, $a, b, \in \mathbb{R}$, akkor

$$(w - z)(w - \bar{z}) = w^2 - 2aw + (a^2 + b^2)$$

egy valós polinom.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

MEGJEGYZÉS

1. *Az algebra alaptétele szerint a komplex irreducibilis polinomok pontosan a komplex elsőfokú polinomok.*
2. *Valós irreducibilis polinomok a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.*

Vegyük észre, hogy ha p egy valós polinom, akkor a konjugálas tulajdonságai miatt $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ minden z komplex számra. Tehát ha z egy komplex gyöke $p(w)$-nek, akkor $\bar{z}$ is. Másrészt, ha $z = a + bi$, $a, b, \in \mathbb{R}$, akkor

$$(w - z)(w - \bar{z}) = w^2 - 2aw + (a^2 + b^2)$$

egy valós polinom.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

MEGJEGYZÉS

1. *Az algebra alaptétele szerint a komplex irreducibilis polinomok pontosan a komplex elsőfokú polinomok.*
2. *Valós irreducibilis polinomok a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.*

Vegyük észre, hogy ha p egy valós polinom, akkor a konjugálas tulajdonságai miatt $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ minden z komplex számra. Tehát ha z egy komplex gyöke $p(w)$-nek, akkor $\bar{z}$ is. Másrészt, ha $z = a + bi$, $a, b, \in \mathbb{R}$, akkor

$$(w - z)(w - \bar{z}) = w^2 - 2aw + (a^2 + b^2)$$

egy valós polinom.

IRREDUCIBILIS POLINOMOK

MEGJEGYZÉS

1. *Az algebra alaptétele szerint a komplex irreducibilis polinomok pontosan a komplex elsőfokú polinomok.*
2. *Valós irreducibilis polinomok a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.*

Vegyük észre, hogy ha p egy valós polinom, akkor a konjugálas tulajdonságai miatt $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ minden z komplex számra. Tehát ha z egy komplex gyöke $p(w)$-nek, akkor $\bar{z}$ is. Másrészt, ha $z = a + bi$, $a, b, \in \mathbb{R}$, akkor

$$(w - z)(w - \bar{z}) = w^2 - 2aw + (a^2 + b^2)$$

egy valós polinom.

Irreducibilis polinomok

Megjegyzés

A valós irreducibilis polinomok pontosan a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.

Állítás (az algebra alaptételének következménye)

Minden valós polinom felbontható valós elsőfokú és negatív diszkriminánsú valós másodfokú polinomok szorzatára.

Irreducibilis polinomok

Megjegyzés

A valós irreducibilis polinomok pontosan a valós elsőfokú polinomok, és azon másodfokú polinomok, melyek diszkriminánsa negatív.

Állítás (az algebra alaptételének következménye)

Minden valós polinom felbontható valós elsőfokú és negatív diszkriminánsú valós másodfokú polinomok szorzatára.